Devoir surveillé $n°1$
Correction

# Exercice I

**1.** Soit $x \in \mathbb{Z}$.
Si $x \in A$ et $x \notin B$, on a $\chi_{A\cup B}(x) + \chi_{A\cap B}(x) - \chi_A(x) - \chi_B(x) = 1 - 0 - 1 - 0 = 0$. De même si $x \notin A$ et $x \in B$, alors $\chi_{A\cup B}(x) + \chi_{A\cap B}(x) - \chi_A(x) - \chi_B(x) = 0$.
Si $x \in A \cap B$, on a $\chi_{A\cup B}(x) + \chi_{A\cap B}(x) - \chi_A(x) - \chi_B(x) = 1 + 1 - 1 - 1 = 0$.
Si $x \notin A$ et $x \notin B$, on a $\chi_{A\cup B}(x) + \chi_{A\cap B}(x) - \chi_A(x) - \chi_B(x) = 0 + 0 - 0 - 0 = 0$.
D'où :

$$\chi_{A\cup B} + \chi_{A\cap B} - \chi_A - \chi_B = 0.$$

**2.** Soit $x \in Z$.
Si $x \in n\mathbb{Z}$, alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $x + kn \in n\mathbb{Z}$ et donc $\chi_{n\mathbb{Z}}(x + kn) = 1 = \chi_{n\mathbb{Z}}(x)$.
Si $x \notin n\mathbb{Z}$, alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $x + kn \notin n\mathbb{Z}$ et donc $\chi_{n\mathbb{Z}}(x + kn) = 0 = \chi_{n\mathbb{Z}}(x)$. D'où :

$$\forall x \in \mathbb{Z} \text{ et } \forall k \in \mathbb{Z},\ \chi_{n\mathbb{Z}}(x + kn) = \chi_{n\mathbb{Z}}(x).$$

Donc $\chi_{n\mathbb{Z}}$ est $n$-périodique.
Supposons qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m < n$ et $\chi_{n\mathbb{Z}}$ soit $m$-périodique. Comme $0 \in n\mathbb{Z}$, alors $\chi_{n\mathbb{Z}}(m) = \chi_{n\mathbb{Z}}(0 + m) = 1$, et donc $m \in n\mathbb{Z}$ ce qui contredit la définition de $n$. Donc $n$ est la période de l'application $\chi_{n\mathbb{Z}}$.

**3.** D'après la question 1., on a :

$$\chi_C = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}.$$

Si $x \in A$ et $x \notin B$, on a $\chi_C(x + ab) = \chi_A(x + ab) + \chi_B(x + ab) - \chi_{A\cap B}(x + ab) = 1 + 0 - 0 = \chi_C(x)$.
De même si $x \notin A$ et $x \in B$, alors $\chi_C(x+ab) = \chi_A(x+ab)+\chi_B(x+ab)-\chi_{A\cap B}(x+ab) = 0+1-0 = \chi_C(x)$.
Si $x \in A \cap B$, on a $\chi_C(x + ab) = \chi_A(x + ab) + \chi_B(x + ab) - \chi_{A\cap B}(x + ab) = 1 + 1 - 1 = \chi_C(x)$.
Si $x \notin A$ et $x \notin B$, on a $\chi_C(x + ab) = \chi_A(x + ab) + \chi_B(x + ab) - \chi_{A\cap B}(x + ab) = 0 + 0 - 0 = \chi_C(x)$. Donc $\chi_C$ est $ab$-périodique.

**4.** La période de $4\mathbb{Z} \cup 6\mathbb{Z}$ est $12$; c'est le ppcm de $4$ et $6$.

**5.** D'après la question 1., on a $\chi_{\mathbb{Z}} + \chi_{\varnothing} - \chi_{\mathbb{Z}\setminus A} - \chi_A = 0$, d'où

$$\chi_{\mathbb{Z}\setminus A} = 1 - \chi_A.$$

Donc si $A$ est périodique, il est de même de $\mathbb{Z} \setminus A$ et ils ont la même période.

**6.** En utilisant la question 3. on peut montrer par récurrence sur $n$ que $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} p_i Z$ est périodique et que $p_1 p_2 ... p_n$ est une période.

**7.** D'après la question 5., $\mathbb{Z} \setminus S$ est périodique et que $p_1 p_2 ... p_n$ est une période. Si $m \in \mathbb{Z} \setminus S$, alors il existe des entiers $r_1, r_2, ..., r_n$ tels que $m = \pm p_1^{r_1} p_2^{r_2} ... p_n^{r_n}$ ( décomposition d'un entiers en facteurs premiers ). Si l'un des $r_i$ est non nul $m$ serait un élément de $S$ ce qui absurde, donc $m = \pm 1$. L'autre inclusion est évidente.

**8.** Puisque $\mathbb{Z} \setminus S = \{-1, 1\}$ n'est pas périodique, l'hypothèse : "l'ensemble des nombres premiers est fini" est fausse.

# Exercice II

**1.** On a $0 \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$, de plus $(a + b\sqrt{3}) - (a_0 + b_0\sqrt{3}) = (a - a_0) + (b - b_0)\sqrt{3}$ et $(a + b\sqrt{3}) \times (a_0 + b_0\sqrt{3}) = (aa_0 + 3bb_0) + (ab_0 + ba_0)\sqrt{3}$, donc $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ est stable pour l'addition et pour la multiplication, comme il contient aussi 1 c'est un sous-anneau de $(\mathbb{R},+,.)$. Pour que ce soit un corps, il suffit de trouver un inverse pour $a+b\sqrt{3}\neq 0$, et c'est

$$\frac{a}{a^2-3b^2}-\frac{b}{a^2-3b^2}\sqrt{3},$$

où le dénominateur est un nombre rationnel non nul (par l'irrationalité de $\sqrt{3}$).

**2.** (a) On a $f(0)=0$ et $f(1)=1$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f(n)=f(1+1+...+1)=nf(1)=n$, de plus si $n\in\mathbb{Z}$, $-n\in\mathbb{N}$ et donc $f(-n)=f(0-n)=f(0)-f(n)=-n$, d'où $\forall n\in\mathbb{Z}$, $f(n)=n$.
On a donc pour tous $p$ et $q$ entiers, $q\neq 0$, $f\left(\frac{p}{q}\right)=pf\left(\frac{1}{q}\right)=\frac{p}{q}$, donc $f$ coïncide avec l'identité sur $\mathbb{Q}$.

(b) $\sqrt{3}$ vérifie $(\sqrt{3})^2-3=0$, donc $f$ étant un automorphisme de corps $(f(\sqrt{3}))^2-f(3)=0$, mais $f(3)=3$, donc $f(\sqrt{3})=\sqrt{3}$ ou $-\sqrt{3}$ : il y a donc au plus 2 possibilité pour $f$ :
• soit $f(\sqrt{3})=\sqrt{3}$ et $f$ est l'application identique, qui est bien un automorphisme de $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$,
• soit $f(\sqrt{3})=-\sqrt{3}$, c'est-à-dire pour tout $a$ et $b$ dans $\mathbb{Q}$ on a $f(a+b\sqrt{3})=a-b\sqrt{3}$, dont on peut vérifier que c'est bien un automorphisme de $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

**3.** Supposons qu'il existe un automorphisme de corps $f$ de $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ dans $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, donc on peut vérifier comme précédemment que $\forall r\in\mathbb{Q},\quad f(r)=r$. D'autre part, il existe $a,b\in\mathbb{Q}$ tels que $f(\sqrt{3})=a+b\sqrt{5}$, mais $f(3)=f(\sqrt{3})f(\sqrt{3})=(a+b\sqrt{5})^2=a^2+5b^2+2ab\sqrt{5}$, donc

$$\begin{cases} a^2+5b^2=3\\ 2ab=0.\end{cases}$$

D'où,
• si $a=0$, alors $5b^2=3$ et donc $b=\pm\sqrt{\frac{3}{5}}\notin\mathbb{Q}$,
• si $b=0$, alors $a^2=3$ et donc $a=\pm\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$.
Donc il n'existe aucun automorphisme de corps de $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ dans $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

# Problème

## Généralités

**1.** Il est clair que $\text{Stab}_G(x)$ est non vide, car il contient l'élément neutre $e$, de plus il y a stabilité par la multiplication et par le passage à l'inverse. Donc $\text{Stab}_G(x)$ est un sous-groupe de $G$.

**2.** D'après (1) $\mathscr{R}$ est symétrique, de plus si $y=g.x$, alors $g^{-1}.y=g^{-1}.(g.g)=(g^{-1}*g).x=e.x=x$, donc $\mathscr{R}$ est symétrique, enfin si $y=g.x$ et $z=h.y$, alors $z=h.(g.x)=(h*g).x$, donc la relation $\mathscr{R}$ est transitive. D'où $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur $E$.

**3.** Si l'action est transitive, alors $\forall y\in E$, il existe $g\in G$ tel que $y=g.x$ et donc $y\in\text{Orb}_G(x)$, donc il y a un seul orbite qu'est $E$.

**4.** Soient $x$ et $y$ deux éléments de $E$ tels que $\gamma_g(x)=\gamma_g(y)$, donc en multipliant par l'inverse de $g$ et en utilisant aussi (1), on obtient $x=y$. Donc l'application $\gamma_g$ est injective.
Si $y\in E$, on a $y=g.(g^{-1}.y)$, donc $(g^{-1}.y)$ est un antécédent de $y$ par $\gamma_g$. D'où la surjectivité de $\gamma_g$.

**5.** Pour tout $(g,h)$ dans $G^2$ et tout $x\in E$, on a :

$$\Gamma(g*h)(x)=(g*h).x=g.(h.x)=\Gamma(g)(\Gamma_h(x))=\Gamma_g\circ\Gamma_h(x).$$

D'où

$$\Gamma(g*h)=\Gamma(g)\circ\Gamma_h.$$

D'où le résultat.

**6.** Soit $g\in\ker(\Gamma)$, alors pour tout $x\in E$, $\Gamma(g)(x)=g.x=Id_E(x)=x$, donc $g\in Stab_G(x)$ et ceci pour tout $x\in E$, donc $\ker(\Gamma)\subset\bigcap_{x\in E}\text{Stab}_G(x)$.

Inversement, si $g \in \bigcap_{x\in E} \mathrm{Stab}_G(x)$, alors $\forall x \in E$, $g.x = x$ ou encore $\Gamma(g) = Id_E$, donc $g \in \ker(\Gamma)$. D'où l'égalité :

$$\ker(\Gamma) = \bigcap_{x\in E} \mathrm{Stab}_G(x).$$

## Exemples

1. Pour tout $(g,h,k) \in G^3$, $e * g = g$ et $(g*h)*k = g*(h*k)$, donc l'application $(g,h) \mapsto g*h$ définit une action de $G$ sur $G$.
De plus $\forall (g,h) \in G^2$, on a $g = g*(h^{-1}*h) = (g*h^{-1})*h$, donc l'action est transitive. Maintenant si $\Gamma(g) = Id_G$, alors ceci entraine, pour tout $h \in G$, $g*h = h$, donc $g = h*h^{-1} = e$, ce qui montre que l'application $\Gamma$ est injectif et donc l'action est fidèle.
2. Notons $\varphi$ cette application, on a :
• $\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi(I_n, M) = I_n M^t I_n = M$
• $\forall P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi(Q, \varphi(P,M)) = Q\varphi(P,M)^tQ = Q(PM^tP^t)Q = (QP)M^t(QP) = \varphi(QP, M)$.
Donc il s'agit bien d'une opération.
• $I_2$ et $-I_2$ ils ont le même effet sur tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, donc l'action n'est pas fidèle.
3. (a) L'application $\det$ est un morphisme de groupes de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), .)$ dans $(\mathbb{R}^*, \times)$, donc $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\{1\})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.
(b) Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et $z \in \mathbb{H}$, on pose $Mz = \dfrac{az+b}{cz+d}$, on a :

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{(az+b)(c\overline{z}+d}{|cz+d^2|} = \frac{ac|z^2|+bd+(a+c)x+iy}{|cz+d|^2}$$

En particulier, on a $\mathrm{Im}\left(\dfrac{az+b}{cz+d}\right) = \dfrac{\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2}$ est strictement positif, donc $\mathbb{H}$ est stable par l'action.
• $I_2 z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z = \dfrac{z+0}{0+1} = z$.
• Si $M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et $z \in \mathbb{H}$, alors

$$\begin{aligned} \frac{a_1 M_2 z + b_1}{c_2 M_2 z + d_1} &= \frac{a_1 \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} + b_1}{c_1 \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} + d_1} \\ &= \frac{(a_1 a_2 + b_1 c_2) z + (a_1 b_2 + b_1 d_2)}{(c_1 a_2 + d_1 c_2) z + (c_1 b_2 + d_1 d_2)} \end{aligned}$$

et

$$M_1 M_2 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 + b_1 c_2 & a_1 b_2 + b_1 d_2 \\ c_1 a_2 + d_1 c_2 & c_1 b_2 + d_1 d_2 \end{pmatrix}$$

ce qui permet de conclure.
(c) Soit $z = x + iy \in \mathbb{H}$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a $Mz = iy = i\mathrm{Im}(z)$, donc $i\mathrm{Im}(z) \in \mathrm{Orb}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}(z)$.
(d) On a, puisque $y > 0$,

$$\begin{pmatrix} \sqrt{y} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix} i = iy,$$

donc $iy \in \mathrm{Orb}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}(i)$.

(e) • Pour montrer que l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est transitive sur $\mathbb{H}$, il suffit de montrer que l'on peut envoyer $i$ sur n'importe quel point $z = x + iy$ de $\mathbb{H}$, ce qui suit de la formule

$$\begin{pmatrix} \sqrt{y} & \frac{x}{\sqrt{y}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix} i = \frac{\sqrt{y}i + \frac{x}{\sqrt{y}}}{\frac{1}{\sqrt{y}}} = x + iy = z.$$

• $I_2$ et $-I_2$ ils ont le même effet sur tout $z \in \mathbb{H}$, donc l'action n'est pas fidèle.

(f) Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ vérifie $Mi = i$, alors $ai + b = i(ci + d)$ et donc $c = -b$ et $a = d$. Comme de plus $ad = bc = 1$, on a $a^2 + b^2 = 1$, et $M$ est la matrice d'une rotation. Donc le stabilisateur de $i$ est le sous-groupe des rotations $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

••••••••