

Devoir surveillé n°3
Correction

Exercice I

1. Posons $B = 8A$. Le polynôme caractéristique de B s'écrit :

$$\chi_B = X^2 - \text{tr}(B)X + \det(B) = X^2 - 2X - 3 = (X + 1)(X - 3).$$

Ce polynôme est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$, donc B est diagonalisable, il est de même de la matrice A . En particulier A est semblable à une matrice diagonale.

On peut remarquer que A est une matrice symétrique à coefficients réels, donc elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Les éléments propres de la matrice B : On a $\text{Sp}(B) = \{-1, 3\}$. Le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 est caractérisé par le système :

$$\begin{cases} (1 + 2 \cos(2\alpha))x + 2 \sin(2\alpha)y = -x \\ (2 \sin(2\alpha))x + (1 - 2 \cos(2\alpha))y = -y \end{cases}$$

ou encore $\cos(\alpha)x + \sin(\alpha)y = 0$. D'où

$$E_{-1}(B) = \text{Vect} \begin{pmatrix} \sin(\alpha) \\ -\cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Pour la valeur propre 3, on trouve

$$E_3(B) = \text{Vect} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}.$$

2. Par définition, $\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$.

$$\text{On a } A^n = \left(\frac{1}{8}\right)^n B^n = P \begin{pmatrix} \left(\frac{-1}{8}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{3}{8}\right)^n \end{pmatrix} P^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \\ -\cos(\alpha) & \sin(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Par conséquent,

$$\exp(A) = P \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \\ -\cos(\alpha) & \sin(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \\ \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-1} \sin^2(\alpha) + e^3 \cos^2(\alpha) & -e^{-1} \cos(\alpha) \sin(\alpha) + e^3 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \\ -e^{-1} \cos(\alpha) \sin(\alpha) + e^3 \sin(\alpha) \cos(\alpha) & e^{-1} \cos^2(\alpha) + e^3 \sin^2(\alpha) \end{pmatrix} \quad (2)$$

Exercice II

1. L'égalité est vraie pour tout monôme $P(X) = X^n$ et se généralise à tout $P \in R[X]$ par linéarité de l'intégrale.

D'après ce qui précède, on a :

$$\int_0^1 P(t)^2 dt \leq \int_{-1}^1 P(t)^2 dt = \left| \int_{-1}^1 P(t)^2 dt \right| \leq \left| \int_0^\pi P(e^{i\theta})^2 e^{i\theta} d\theta \right|.$$

Par l'inégalité des intégrales

$$\int_0^1 P(t)^2 dt \leq \int_0^\pi |P(e^{i\theta})|^2 d\theta.$$

et puisque

$$\int_{-\pi}^0 |P(e^{i\theta})|^2 d\theta = \int_0^\pi |P(e^{-ix})|^2 dx, \quad x = -\theta$$

avec $P(e^{-i\theta}) = \overline{P(e^{i\theta})}$, car P est un polynôme à coefficients réels, on obtient

$$\int_0^1 P(t)^2 dt \leq \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi |P(e^{i\theta})|^2 d\theta.$$

2. Il est clair que

$$\sum_{k=0}^n a_k(f)^2 = \sum_{k=0}^n a_k(f) \int_0^1 t^k f(t) dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^n (a_k(f) t^k) f(t) dt$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left(\sum_{k=0}^n a_k(f)^2 \right)^2 \leq \left(\int_0^1 \sum_{k=0}^n a_k(f) t^k dt \right) \left(\int_0^1 f(t)^2 dt \right)$$

avec

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^n a_k(f) t^k dt \leq \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi \left| \sum_{k=0}^n a_k(f) e^{ik\theta} \right|^2 d\theta = \pi \left(\sum_{k=0}^n a_k(f)^2 \right)$$

On en déduit

$$\sum_{k=0}^n a_k(f)^2 \leq \pi \left(\int_0^1 f(t)^2 dt \right).$$

L'inégalité précédente montre que la série de terme général $a_n(f)^2$ est convergente et que sa somme

$$\sum_{n=0}^\infty a_n(f)^2 \leq \pi \left(\int_0^1 f(t)^2 dt \right) = \pi \|f\|_2^2.$$

3. D'après la question précédente l'application ρ est bien définie de E dans $\mathbb{R}^+$.

- Soit $f \in E$ tel que $\rho(f) = 0$. Puisque il s'agit d'une série à termes positifs, alors $a_n(f) = \int_0^1 t^n f(t) dt = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Puisque tout polynôme est combinaison linéaire de monômes, on a pour tout polynôme P :

$$\int_0^1 P(t) f(t) dt = 0.$$

Par densité, il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers f sur $(E, \|\cdot\|_\infty)$. On a alors pour $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq \int_0^1 (f(t))^2 dt = \int_0^1 (f(t) - P_n(t)) f(t) dt \leq \|f - P_n\|_\infty \|f\|_\infty$$

Comme la suite $(\|f - P_n\|_\infty)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0, on déduit $\int_0^1 (f(t))^2 dt = 0$, d'où, puisque f est continue sur $[0, 1]$, $f = 0$.

- Les autres propriétés sont évidentes : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f \in E, \rho(\lambda f) = |\lambda| \rho(f)$
 $\forall f \in E, \forall g \in E, \rho(f + g) \leq \rho(f) + \rho(g).$

4. Les fonctions f_n sont bien des éléments de E . On a

$$\|f_n\|_2^2 = 1 + \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{dt}{t}$$

donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_2^2 = +\infty$. et

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, |a_k(f_n)| = \left| \int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt{n} t^k dt + \int_{\frac{1}{n}}^1 t^{k-\frac{1}{2}} dt \right| \leq \int_0^1 t^{n-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{k + \frac{1}{2}},$$

$$\text{car } \sqrt{n} t^k \leq t^{k-\frac{1}{2}} \text{ si } t \in \left[0, \frac{1}{n}\right].$$

Donc $\rho(f_n)^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\left(k + \frac{1}{2}\right)^2} < +\infty$. Les normes ρ et $\|\cdot\|_{\infty}$ ne sont pas équivalentes.

Problème

Première partie

1. (a) Par récurrence on montre que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à termes positifs et qu'elle est croissante.

Donc $0 \leq \frac{u_{n-1}}{u_n} \leq 1$ et par conséquent la suite $\left(\frac{u_{n-1}}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + r^{n-1} \frac{u_{n-1}}{u_n}$ et $r \in]0, 1[$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1.$$

D'autre part, on a, pour tout $n \geq 2$,

$$(1) \quad u_n - u_1 = \sum_{k=1}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=1}^{n-1} r^{k-1} u_{k-1}.$$

Donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} r^n u_n$ sont de même nature. Or $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1} r^{n+1}}{u_n r^n} \right| = r$ et

$r \in]0, 1[$, d'où la convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} r^n u_n$ et par la suite la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Soit $l = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$. La relation (1) entraîne $l - u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} r^n u_n > 0$, donc $l > u_1 > 0$.

(b) Soit $N > n$, alors on peut écrire :

$$(2) \quad u_{N+1} - u_n = \sum_{k=n}^N r^{k-1} u_{k-1}.$$

Comme $l = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on a :

$$l - \varepsilon \leq u_n \leq l + \varepsilon.$$

Donc pour tout $k \geq n \geq n_0$, on a :

$$(l - \varepsilon)r^{k-1} \leq u_{k-1}r^{k-1} \leq (l + \varepsilon)r^{k-1}.$$

puis par sommation

$$(l - \varepsilon) \sum_{k=n}^N r^{k-1} \leq \sum_{k=n}^N u_{k-1}r^{k-1} \leq (l + \varepsilon) \sum_{k=n}^N r^{k-1}.$$

Quand N tend vers ∞ , on obtient :

$$(l - \varepsilon) \frac{r^{n-1}}{1 - r} \leq \sum_{k=n}^{\infty} u_{k-1}r^{k-1} \leq (l + \varepsilon) \frac{r^{n-1}}{1 - r}.$$

La relation (2) entraîne

$$(l - \varepsilon) \frac{r^{n-1}}{1 - r} \leq l - u_n \leq (l + \varepsilon) \frac{r^{n-1}}{1 - r}.$$

D'où

$$-\varepsilon \frac{r^{n-1}}{1 - r} \leq (l - u_n) - \frac{lr^{n-1}}{1 - r} \leq \varepsilon \frac{r^{n-1}}{1 - r}.$$

D'où

$$l - u_n \sim \frac{lr^{n-1}}{1 - r}.$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}x^{n+1}}{u_nx^n} \right| = |x|$, donc d'après le règle de D'Alembert, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n x^n$ converge si $|x| < 1$ et diverge si $|x| > 1$.
3. Puisque la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à termes positifs, alors la série définissant f est aussi à termes positifs (pour $x \in [0, 1[$), donc f est croissante sur $[0, 1[$. Donc f admet une limite généralisée en 1, soit $l = \lim_{x \rightarrow 1, x < 1} f(x)$. Si $l < +\infty$, on aura, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^n u_k x^k < l$$

et donc

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \left(\sum_{k=0}^n u_k x^k \right) < l$$

et donc

$$\sum_{k=0}^n u_k < l,$$

donc la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge, ce qui est absurde puisque la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0. Donc

on a nécessairement $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = +\infty$.

Deuxième partie

1. Montrons par récurrence sur n que $|u_n| \leq v_n$ pour tout $n \geq 2$. on a $v_2 = v_1 + |a_0|v_0 = |u_1| + |a_0||u_0|$, donc $|u_2| \leq |u_1| + |a_0||u_0| = v_2$. La propriété est donc vérifiée pour $n = 2$.
Supposons maintenant, $|u_k| \leq v_k$ pour tout $k \leq n$, donc

$$|u_{n+1}| \leq |u_n| + |a_n||u_{n-1}| \leq v_n + |a_{n-1}|v_{n-1} = v_{n+1}.$$

Ainsi, $\forall n \geq 2, |u_n| \leq v_n$.

2. Comme $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, alors $\frac{v_{n-1}}{v_n} \leq 1$ et donc

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq 1 + |a_{n-1}| \frac{v_{n-1}}{v_n} \leq 1 + |a_{n-1}| \leq e^{|a_{n-1}|}.$$

D'où, pour tout $n \geq 2$, on a :

$$0 \leq v_{n+1} \leq v_n e^{|a_{n-1}|}.$$

3. La convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (v_{n+1} - v_n)$ est équivalent à l'existence de la limite de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
D'après 2., on a :

$$0 \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \leq e^{|a_{n-1}|}.$$

Donc

$$\ln(v_{n+1}) - \ln v_n \leq |a_{n-1}|.$$

Comme $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$ converge, alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (\ln v_{n+1} - \ln v_n)$ converge, donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln v_n$ existe, il est de même de $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$. D'où la convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (v_{n+1} - v_n)$.

4. On sait que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (v_{n+1} - v_n)$ converge, donc $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$ existe et par suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, soit donc $M > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq v_n \leq M.$$

D'autre part, $|u_{n+1} - u_n| = |a_{n-1}||u_{n-1}| \leq M|a_{n-1}|$, donc par comparaison $\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_{n+1} - u_n|$ converge,

d'où la convergence absolue de $\sum_{n \in \mathbb{N}} (u_{n+1} - u_n)$.

La convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (u_{n+1} - u_n)$ entraîne l'existence de la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Troisième partie

1. La condition nécessaire de la convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ entraîne $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, donc pour un réel $r \in]0, 1[$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$ implique $0 < a_n \leq r$ et donc $a_n^n \leq r^n$ pour tout $n \geq n_0$. Ainsi par comparaison à une série géométrique la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n^n$ converge.
2. D'après ce qui précède, le réel $L(u_0, u_1)$ est bien défini. La linéarité de L découle de celle de la limite.

3. D'après le théorème du rang, on a :

$$2 = \dim \ker (L) + \operatorname{rg} (L).$$

Donc $\dim \ker (L) = 1$ ou $\dim \ker (L) = 2$. En fait, L est une forme linéaire non nulle, en effet, si $u_1 > u_0 > 0$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante convergente, donc $L(u_0, u_1) > u_0 > 0$. Donc L est non nulle et par suite $\ker (L)$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^2$, donc $\dim \ker (L) = 1$.

4. Supposons qu'il existe un entier n_0 tel que $u_{n_0} = 0$, alors $u_{n_0+1} = a_{n_0-1}u_{n_0-1}$ et $a_{n_0-1} > 0$, donc u_{n_0+1} et u_{n_0-1} ont le même signe.

Supposons, par exemple, que $u_{n_0-1} > 0$, donc $u_{n_0+1} > 0$ et par récurrence on trouve que $\forall n \geq n_0 - 1$, $u_n > 0$.

De même si on suppose que $u_{n_0-1} < 0$, alors $u_n \leq 0$ pour tout $n \geq n_0 - 1$. Dans tous les cas on a les u_n ont le même signe.

D'autre part, on a $\sum_{n=n_0}^{\infty} (u_{n+1} - u_n) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_{n-1}u_{n-1}$, donc $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_{n+1} - u_n) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_{n-1}u_{n-1}$. Ainsi

$$0 = L(u_0, u_1) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_{n-1}u_{n-1}.$$

Donc $a_{n_0-1}u_{n_0-1} = 0$ et par suite $u_{n_0-1} = 0$. On refait le même raisonnement pour l'indice $n_0 - 1$ on trouve $u_{n_0-2} = 0$ de proche en proche on trouve que $u_n = 0$ pour tout $n \leq n_0$ ce qui est absurde car $(u_1, u_0) \neq (0, 0)$.

En conclusion, $\forall n \geq 2$, $u_n \neq 0$.

5. Supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0}u_{n_0+1} \geq 0$.

Cas 1 : $u_{n_0} > 0$, alors $(u_n)_{n \geq n_0}$ est croissante et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut pas converger vers 0 ce qui est absurde.

Cas 2 : $u_{n_0} < 0$, alors $(u_n)_{n \geq n_0}$ serait décroissante et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut pas converger vers 0.

Cas 3 : $u_{n_0} = 0$ ceci est absurde d'après ce qui précède.

Réciproquement, si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n u_{n+1} < 0$, on sait que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, d'après la deuxième partie, donc $L(u_1, u_0)^2 \leq 0$, donc $L(u_1, u_0) = 0$ et par conséquent $(u_1, u_0) \in \ker (L)$.

6. (a) On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + a_{n-1} \frac{u_{n-1}}{u_n}$, donc $-r_n = 1 - \frac{a_{n-1}}{r_{n-1}}$ et $r_n = \frac{a_{n-1}}{r_{n-1}} - 1$. D'autre part,

$$u_{n-1}u_{n+1} = u_{n-1}u_n + a_{n-1}u_{n-1}^2$$

Comme $u_n u_{n+1} < 0$ alors $u_{n+1}u_{n-1} = u_{n+1}u_n \frac{u_{n-1}}{u_n} > 0$ pour tout $n \geq 1$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

on a $u_n u_{n-1} > -a_{n-1}u_{n-1}^2$ et donc

$$-\frac{u_n u_{n-1}}{u_{n-1}^2} < a_{n-1}$$

et donc

$$-\frac{u_n}{u_{n-1}} < a_{n-1}$$

c'est-à-dire $r_{n-1} \leq a_{n-1}$ et $r_n = -\frac{u_{n+1}}{u_n} > 0$, d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < r_n < a_n.$$

(b) D'après ce précède on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < r_n < a_n$. La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ étant convergente, donc il est

de même de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} r_n$.

La condition nécessaire de convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} r_n$ entraîne $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$,
donc par la règle de D'Alembert, $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge absolument, donc elle est convergente.

Quatrième partie

1. On a, pour tout $x > 0$, $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{1+x} = \frac{1}{1+x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \frac{a}{1+x}$ ($a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$) donc A est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, +\infty[$.

2. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|B'_n(x)| \leq \prod_{k=0}^n a_k$. Pour $n = 0$, on a $B_0(x) = A_0(x) = \frac{a_0}{1+x}$ et $B'_0(x) = -\frac{a_0}{(1+x)^2}$, donc $|B'_0(x)| \leq a_0$. Supposons que le résultat est vrai à l'ordre $n-1$. On a

$$B_n(x) = B_{n-1} \circ A(x)$$

et donc

$$B'_n(x) = B'_{n-1}(A_n(x))A'_n(x)$$

$$\text{Comme } |A'_n(x)| \leq a_n, \text{ alors } |B'_n(x)| \leq \left(\prod_{k=0}^{n-1} a_k \right) a_n = \prod_{k=0}^n a_k.$$

Appliquons le théorème des accroissements finis à l'application B_{n-1} entre 0 et $A_n(0)$: Il existe c tel que

$$B_{n-1}(A_n(0)) - B_{n-1}(0) = B'_{n-1}(c)(A_n(0) - 0).$$

Donc

$$|\alpha_n - \alpha_{n-1}| \leq |B'_{n-1}(c)|a_n \leq \left(\prod_{k=0}^{n-1} a_k \right) a_n = \prod_{k=0}^n a_k.$$

3. On sait que $\ker(L) \neq \{0\}$, donc il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $L(\alpha, \beta) = 0$. $\alpha\beta > 0$ d'après la troisième partie, la question 5. Par linéarité, on a aussi $L\left(\frac{\alpha}{\beta}, 1\right) = 0$. Donc on peut dire que $\ker(L)$ est engendré par $(r_0, 1)$ avec $r_0 = \frac{\alpha}{\beta}$.

Soit $(-r', 1) \in \ker(L)$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(-r', 1) = \lambda(-r_0, 1)$, donc $r' = r_0$ donc r_0 est unique.

D'autre part, $\forall u_1 \in \mathbb{R}$, $u_1(-r_0, 1) = (-r_0 u_1, u_1) \in \ker(L)$. De plus $u_0 u_1 < 0$ entraîne $-r_0 u_1^2 < 0$, donc $r_0 > 0$. D'où le résultat.

4. On a $|\alpha_n - \alpha_{n-1}| \leq v_n$ avec $v_n = \prod_{k=0}^n a_k$. Puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = 0$, alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$

converge, donc il est de même de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} |\alpha_n - \alpha_{n-1}|$.

• • • • •