Devoir surveillé $n°4$
Correction

Exercice I

1. Pour chaque limite une variable est fixée et une seule varie, on connait donc le taux de variation de la fonction h et la définition du nombre dérivé qui existe, car h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi

$$\lim_{y\to x} f(x,y) = h'(x)$$

et

$$\lim_{x\to y} f(x,y) = h'(y).$$

2. On remarque que f est bien définie sur $\mathbb{R}^2\backslash\triangle$, il faut donc prolonger f en tout point de la forme (a,a). D'après l'égalité des accroissements finis, et comme h est de classe $\mathscr{C}^1$, il existe un réel c compris entre x et y ($x \neq y$) tel que :

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(c)$$

Si (x,y) tend vers (a,a), alors par encadrement c tend vers a ainsi et par continuité de h' :

$$\lim_{(x,y)\to(a,a)} f(x,y) = \lim_{c\to a} h'(c) = h'(a).$$

On peut donc prolonger f par continuité sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } x \neq y, \\ h'(a) & \text{si } x = y. \end{cases}$$

3. (a) φ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ car produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}^{+*}$, de plus par croissances comparées $\lim_{t\to 0^+} \varphi(t) = 0 = \varphi(0)$, donc φ est bien continue sur $\mathbb{R}^+$.

(b) Il faut prouver comme au 2. que Φ se prolonge en tout point de la forme (a,a). On remarque que pour tout $x \neq y$:

$$\Phi(x,y) = |f(x)-f(y)|\ln|x-y| = \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}|x-y|\ln|x-y|.$$

D'après le 2. et le 3.(a), $\lim_{(x,y)\to(a,a)} \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(a)$ et $\lim_{(x,y)\to(a,a)} |x-y|\ln|x-y| = \lim_{t\to 0} t\ln(t) = \lim_{t\to 0^+} \varphi(t) = 0$.
Donc finalement par produit de limite et en composant par la fonction valeur absolue :

$$\lim_{(x,y)\to(a,a)} \Phi(x,y) = |f'(a)| \times 0 = 0.$$

Ainsi Φ est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\tilde{\Phi}(x,y) = \begin{cases} \Phi(x,y) & \text{si } x \neq y, \\ 0 & \text{si } x = y. \end{cases}$$

Exercice II

1. (a) Pour tout $f \in E$, $\sup_{t\in[0,1]} \|f'(t)\|$ et $\sup_{t\in[0,1]} \|f(t)-f'(t)\|$ existent. Donc N_1 et N_2 sont bien définies.

(b) et (c) Il est clair que pour tout f, g de E et tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :

$$\forall i = 1,2, \quad N_i(\lambda f) = |\lambda| N_i(f) \text{ et } N_i(f+g) \leq N_i(f) + N_i(g).$$

La seule difficulté est de vérifier que $N_i(f) = 0 \Longrightarrow f = 0$.
Pour $i = 1$, si $N_1(f) = 0$, on a à la fois $f(0) = 0$ et $f'(t) = 0$ pour tout $t \in [0,1]$, donc f est identiquement nulle sur $[0,1]$.
Pour $i = 2$, si $N_2(f) = 0$, alors f est solution de l'équation différentielle $y - y' = 0$ sur $[0,1]$, avec la condition initiale $y(0) = 0$, donc $f(t) = f(0)e^t$ pour tout $t \in [0,1]$. On en déduit que f est identiquement nulle sur $[0,1]$.

2. (a) Pour tout $x \in [0,1]$, on a :
$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\mathrm{d}t.$$
Donc
$$|f(x)| \leq \int_0^x \sup_{u\in[0,1]} \|f'(u)\|\mathrm{d}t \leq \|f'\|_\infty x \leq \|f'\|_\infty.$$
D'où
$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} \|f(x)\| \leq \|f'\|_\infty.$$

(b) Soit $f \in E$, on a :
$$N(f) = \|f - f'\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$
D'où, en utilisant la question précédente,
$$N_2(f) \leq 2N_1(f).$$

(c) La solution de l'équation homogène associée à l'équation différentielle $-f' + f = g$ est de la forme $f(t) = ce^t$ où c est une constante. Cherchons une solution particulière de la forme $f(t) = c(t)e^t$, on obtient donc $c(t) = -\int_0^t e^{-x}g(x)\mathrm{d}x + \lambda$, d'où la solution générale :
$$f(t) = \lambda e^t - e^t \int_0^t e^{-x}g(x)\mathrm{d}x.$$
Comme $f(0) = 0$, alors $\lambda = 0$ et donc $\forall t \in [0,1], \;\; f(t) = -e^t \int_0^t e^{-x}g(x)\mathrm{d}x.$

(d) Soit $f \in E$, on a par inégalité triangulaire :
$$N_1(f) = \|f'\|_\infty \leq \|f'\|_\infty + \|f - f'\|_\infty = \|f\|_\infty + N_2(f).$$
Or, d'après la question précédente, pour tout $t \in [0,1]$, on a :
$$|f(t)| = \left| -e^t \int_0^t e^{-x}g(x)\mathrm{d}x \right| \leq e| \int_0^1 e^{-x}g(x)\mathrm{d}x| \leq 2\int_0^1 e^{-x}\|g\|_\infty \mathrm{d}x = (e-1)N_2(f).$$
D'où :
$$\|f\|_\infty \leq (e-1)N_2(f)$$
et donc
$$N_1(f) \leq [(e-1)+1]\, N_2(f) = eN_2(f).$$
Il y a égalité pour la fonction $f : t \mapsto 1 - e^{-t}$, donc e est la meilleure constante possible.

3. (a) Il est clair que les deux applications φ et ψ sont linéaires. De plus, par théorème généraux, u et v sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,1]$, donc les deux applications sont des endomorphismes de E.

(b) Soit $f \in E$, on a :
$$N_1(\psi(f)) = \|\psi(f)'\|_\infty = \|v'\|_\infty.$$
Or, $\forall t \in [0,1]$, $v'(t) = f(t) + f'(0)$, donc
$$\|v'\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \leq 2\|f'\|_\infty.$$
Donc
$$\forall f \in E, \;\; N_1(\psi(f)) \leq 2N_1(f).$$
D'où la continuité de ψ, considéré comme un endomorphisme de E muni de la norme N_1.
L'inégalité $N_2 \leq 2N_1$, de la question 2.(b), montre que l'application ψ est aussi continue lorsque E est muni de la norme N_2.

(c) Considérons la suite de fonctions de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de E définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \;\; \forall t \in [0,1], \;\; f_n(t) = \frac{t^n}{n}.$$
On a $N_1(f_n) = \|f_n'\|_\infty = 1$ et $N_1(\varphi(f_n)) = \|\varphi(f_n)'\|_\infty = \|f_n''\|_\infty = n-1$, donc φ n'est pas borné sur la boule unité et donc φ, considéré comme un endomorphisme de E muni de la norme N_1, n'est pas continu.

(d) D'après la question 3.(b), on a $\forall f \in E$, $N_1(\psi(f)) \leq 2N_1(f)$ et donc

$$\sup_{f\neq 0} \frac{N_1(\psi(f))}{N_1(f)} \leq 2.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0,1]$, posons $f_n(t) = 1 - e^{\frac{-t}{n}}$. On a

$$N_1(f_n) = \|f_n'\|_\infty = \frac{1}{n},$$

puis pour $t \in [0,1]$,

$$\psi(f_n)'(t) = 1 + \frac{1}{n} - e^{\frac{-t}{n}}$$

et donc

$$N_1(\psi(f_n)) = \|\psi(f_n)'\|_\infty = 1 + \frac{1}{n} - e^{\frac{-1}{n}}.$$

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sup\limits_{f\neq 0} \dfrac{N_1(\psi(f))}{N_1(f)} \geq \dfrac{N_1(\psi(f)_n)}{N_1(f_n)} = 1 - \dfrac{e^{\frac{-1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}$. En résumé, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 - \dfrac{e^{\frac{-1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \leq \|T\| \leq 2$ et donc $\|T\| = 2$ [1].

Problème

1. On a pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et tout $X \in \mathbb{R}^n$, $\|AX\| \leq \|A\|\|X\|$. Donc si $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\|ABX\| \leq \|A\|\|BX\| \leq \|A\|\|B\|\|X\|$, d'où :

$$\|AB\| = \sup_{X\neq 0} \frac{\|ABX\|}{\|X\|} \leq \|A\|\|B\|.$$

2. (a) La série $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \dfrac{A^k}{k!}$ est absolument convergente, car $\dfrac{\|A^k\|}{k!} \leq \dfrac{\|A\|^k}{k!}$ et la série $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \dfrac{\|A\|^k}{k!}$ converge et comme $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est complet, en tant qu'espace vectoriel normé de dimension fini, la série $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \dfrac{A^k}{k!}$ est convergente.

(b) Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n(A) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{A^k}{k!}$ la suite de sommes partielles associée à la série $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \dfrac{A^k}{k!}$. Par l'inégalité triangulaire et l'inégalité de la question 1., on peut écrire :

$$\|S_n(A)\| \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{\|A\|^k}{k!}.$$

Par passage à la limite et par continuité de l'application norme $\|.\|$, on obtient $\|\exp(A)\| \leq \exp(\|A\|)$.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $BS_n(A) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{BA^k}{k!}$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{BA^k}{k!}$ existe car $\dfrac{\|BA^k\|}{k!} \leq \dfrac{\|B\|\|A\|^k}{k!}$, donc par passage à la limite et par continuité de l'application produit $(A,B) \mapsto AB$ (bilinéaire en dimension finie), on obtient l'égalité :

$$B\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{BA^k}{k!}.$$

Si A_1 et A_2 sont semblables, alors il existe une matrice P inversible telle que $A_2 = PA_1P^{-1}$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$S_n(A_2) = PS_n(A_1)P^{-1}.$$

L'application $M \mapsto PMP^{-1}$ étant continue (linéaire en dimension finie), donc par passage à la limite on obtient :

$$\exp(A_2) = P\exp(A_1)P^{-1}.$$

Donc les deux matrices $\exp(A_1)$ et $\exp(A_2)$ sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et sont liées par la même matrice de passage P.

1. si $\theta(x) = e^{-x}$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^{\frac{-1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \theta'(0) = -1$.

3. (a) Comme A et B commutent, on a :

$$\frac{(A+B)^n}{n!} = \sum_{i+j=k} \frac{\mathtt{C}_k^i}{k!} A^i B^j = \sum_{i+j=k} \frac{A^i}{i!} \frac{B^j}{j!}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\|S_n(A+B) - S_n(A)S_n(B)\| &= \left\| \sum_{k=0}^{n} \frac{(A+B)^k}{k!} - \sum_{i=0}^{n} \frac{A^i}{i!} \sum_{j=0}^{n} \frac{B^j}{j!} \right\| \\
&= \left\| \sum_{k=0}^{n} \sum_{i+j=k} \frac{A^i}{i!} \frac{B^j}{j!} - \sum_{1 \leq i,j \leq n} \frac{A^i}{i!} \frac{B^j}{j!} \right\| \\
&= \left\| \sum_{n+1 \leq i+j \leq 2n} \frac{A^i}{i!} \frac{A^j}{j!} \right\| \\
&\leq \sum_{n+1 \leq i+j \leq 2n} \frac{\|A\|^i}{i!} \frac{\|A\|^j}{j!} \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \frac{(\|A\| + \|B\|)^k}{k!} \\
&\quad - \sum_{i=0}^{n} \frac{\|A\|^i}{i!} \sum_{j=0}^{n} \frac{\|B\|^j}{j!}.
\end{aligned}$$

Lorsque n tend vers l'infini, ce dernier terme tend vers $e^{\|A+B\|} - e^{\|A\|}e^{\|B\|} = 0$, donc

$$\lim_{n\to\infty} S_n(A+B) - S_n(A)S_n(B) = 0,$$

d'où $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$. On a de même $\exp(A+B) = \exp(B+A) = \exp(B)\exp(A)$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{D^n}{n!} = \operatorname{diag}\left(\dfrac{1}{n!}, \dfrac{2^n}{n!}, \dfrac{3^n}{n!}\right)$, donc $\exp(D) = \operatorname{diag}(e, e^2, e^3)$.

On a $F^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $F^3 = 0$. Donc

$$\exp(F) = I + F + \frac{F^2}{2!} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice E étant diagonalisable, car elle admet trois valeurs propres distinctes 1, 2 et 3. Des vecteurs propres associes sont respectivement $u_1 = (1,0,0)$, $u_2 = (1,1,0)$ et $u_3 = (1,2,2)$. Donc on a l'égalité :

$$E = PDP^{-1}$$

avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, d'où

$$\exp(E) = P\exp(D)P^{-1} = P \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^3 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} e & e^3 - e & \frac{e^3}{2} - e^2 + \frac{e}{2} \\ 0 & e^2 & e^3 - e^2 \\ 0 & 0 & e^3 \end{pmatrix}.$$

On remarque $\exp(E) = \exp(D+F) \neq \exp(D)\exp(F)$, en effet les matrices D et F ne commutent pas.

4. (a) La propriété est bien vérifiée pour $k = 0$. Supposons maintenant

$$\|(A+B)^k - A^k\| \leq (\|A\| + \|B\|)^k - \|A\|^k.$$

On a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{rcl} \|(A+H)^{k+1} - A^{k+1}\| & = & \|(A+H)^k(A+H) - A^k A\| \\ & \leq & \|(A+H)^k A - A^k A - (A+H)^k H\| \\ & \leq & \|(A+H)^k - A^k\| + \|A+H\|^k \|H\| \\ & \leq & ((\|A\|+\|H\|)^k - \|A\|^k)\|A\| \\ & & +(\|A\|+\|H\|)^r(\|H\|+\|A\|-\|A\|) \\ & \leq & (\|A\|+\|H\|)^k\|A\| - \|A\|^{k+1} \\ & & +(\|A\|+\|H\|)^{k+1} - (\|A\|+\|H\|)^k\|A\| \\ & = & (\|A\|+\|H\|)^{k+1} - \|A\|^{k+1} \end{array}$$

(b) D'après l'inégalité précédente, on peut écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\begin{array}{rcl} \left\| \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(A+H)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} \right\| & \leq & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (\frac{(A+H)^k}{k!} - \frac{A^k}{k!}) \\ & \leq & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (\frac{\|A\|+\|H)\|^k}{k!} - \frac{\|A\|^k}{k!}) \\ & \leq & e^{\|A\|}(e^{\|H\|}-1) \end{array}$$

Quand n tend vers l'infini on obtient

$$\|\exp(A+H) - \exp(A)\| \leq e^{\|A\|}(e^{\|H\|}-1),$$

inégalité qui montre que $\lim\limits_{H \to 0} \exp(A+H) = \exp(A)$, donc l'application exponentielle est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

5. (a) Posons $l(x) = xA$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc $f_A = \exp \circ l$; c'est une application continue comme composée d'applications continues.

(b) La série $\displaystyle\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{x^k}{k!} A^k$ converge normalement sur tout segment $[-a, a]$ de $\mathbb{R}$ $(a > 0)$ puisque

$$\forall x \in [-a, a], \quad \left\| \frac{x^k}{k!} A^k \right\| \leq \frac{(a\|A\|)^k}{k!}$$

et la série numérique $\displaystyle\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(a\|A\|)^k}{k!}$ converge, donc on peu intégrer terme à terme :

$$\forall x > 0, \quad \int_0^x f_A(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x \frac{t^k}{k!} A^k \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} A^k.$$

D'où $f_A(x) = I_n + A \displaystyle\int_0^x f_A(t)\mathrm{d}t$, ceci montre que f_A est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}, \ \ f'_A(x) = Af_A(x)$. Par récurrence on montre que f_A est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que $\forall n \in \mathbb{N}, \ \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \ f_A^{(n)}(x) = A^n f_A(x)$.

6. (a) On peut montrer par récurrence que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \ \ C_\theta^{2p} = \begin{pmatrix} (-1)^p\theta^{2p} & 0 \\ 0 & (-1)^p\theta^{2p+1} \end{pmatrix}$$

et

$$\forall p \in \mathbb{N}, \ \ C_\theta^{2p+1} = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^p\theta^{2p+1} \\ (-1)^{p+1}\theta^{2p+1} & 0 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$\exp(C_\theta) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{C_\theta^{2p}}{(2p)!} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{C_\theta^{2p+1}}{(2p+1)!} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Posons, pour $n \geq 3$, $A_\theta = \begin{pmatrix} C_\theta & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$. On a $A_\theta \neq A_{\theta+2\pi}$ cependant $\exp(A_\theta) = \exp(A_{\theta+2\pi})$, donc l'application $A \mapsto \exp(A)$ n'est pas injective.

(b) On a $\exp(A) - I_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = A(I_n + S_A)$ avec $S_A = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{(k+1)!}$. Par continuité $\displaystyle\lim_{A \to 0} S_A = 0$, donc il existe $\alpha > 0$ tel que $\|A\| \leq \alpha \Rightarrow \|S_A\| \leq 1$.

(c) Soit $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $(I_n + T)X = 0$ ou encore $TX = -X$. Si $X \neq 0$, alors $\dfrac{\|TX\|}{\|X\|} = 1$ et donc $\|T\| \geq 1$, ce qui est absurde, d'où $X = 0$.

(d) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\|M\| \leq \alpha$ et $\exp(M) = I_n$. Donc $\exp(M) - I_n = M(I_n + S_M) = 0$, mais $\|M\| \leq \alpha \Rightarrow \|S_M\| < 1$, donc $I + S_M$ est inversible et par conséquent $M = 0$.

7. (a) Pour tout entier $n \geq 1$ et pour toutes matrices M et N, nous avons

$$M^n - N^n = \sum_{i=0}^{n-1} (N^i M^{n-i} - N^{i+1} M^{n-i-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} N^i (M - N) N^{n-i-1},$$

d'où nous déduisons, pour tout $h \in \mathbb{R}^*$,

$$\frac{g_k(x+h) - g_k(x)}{h} = \sum_{i=0}^{k-1} (B + xH)^i H (B + (x+h)H)^{k-i-1}.$$

Le second membre il a une limite fini quand h tend vers 0, donc g_k est dérivable en x et

$$g_k'(x) = \sum_{i=0}^{k-1} (B + xH)^i H (B + xH)^{k-i-1}.$$

(b) D'après ce qui précède, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned}
\|g_k'(x)\| &\leq \sum_{i=0}^{k-1} \|(B + xH)^i H (B + xH)^{k-i-1}\| \\
&\leq \|H\| \sum_{i=0}^{k-1} (\|B\| + x\|H\|)^i (\|B\| + x\|H\|)^{k-i-1} \\
&= k\|H\|(\|B\| + x\|H\|)^{k-1}
\end{aligned}$$

L'inégalité des accroissements fini, appliqué à g_k sur $[0,1]$, entraîne $\|g_k(1) - g_k(0)\| \leq \displaystyle\sup_{x \in [0,1]} \|g_k'(x)\|$, inégalité qui s'écrit encore

$$\|(B + H)^k - B^k\| \leq k\|H\|(\|B\| + \|H\|)^{k-1}.$$

8. (a) On a $T(A, x) = \dfrac{1}{x^2}(\exp(xA) - I_n - xA) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k A^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{A^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k A^{k+2}}{(k+2)!}$ qui est la somme d'une série normalement convergente sur tout segment $[-a, a]$ de $\mathbb{R}$ ($a > 0$), et comme les termes de cette série sont bien définis en 0, alors l'application $x \mapsto T(A, x)$ se prolonge par continuité en 0, en posant $T(A, 0) = \dfrac{A^2}{2}$.

La formule de Taylor à l'ordre 2 avec reste intégral, appliquée à la fonction f_A s'écrit :

$$\exp(xA) = I_n + xA + \frac{x^2 A^2}{2} \int_0^1 (1 - t) \exp(txA) \mathrm{d}t.$$

D'où $T(A, x) = \dfrac{A^2}{2} \displaystyle\int_0^1 (1 - t) \exp(txA) \mathrm{d}t$ et donc $\|T(A, x)\| \leq \dfrac{1}{2} \|A\|^2 \exp(x\|A\|)$.

(b) On a

$$\exp\left(\frac{1}{k} A\right) - \frac{1}{k^2} T\left(A, \frac{1}{k}\right) = I_n + \frac{1}{k} A$$

et

$$\left(\exp\left(\frac{1}{k} A\right)\right)^k = \exp A$$

D'où
$$\left(I_n + \frac{1}{k}A\right)^k - \exp A = \left(\exp\left(\frac{1}{k}A\right) - \frac{1}{k^2}T\left(A, \frac{1}{k}\right)\right)^k - \left(\exp\left(\frac{1}{k}A\right)\right)^k.$$
La formule de la question 7.(b) donne, avec $B = \exp\left(\frac{1}{k}A\right)$ et $H = -\frac{1}{k^2}T\left(A, \frac{1}{k}\right)$:

$$\begin{aligned}
\left\|\left(I_n + \frac{1}{k}A\right)^k - \exp A\right\| &\leq \frac{1}{k}\left\|T\left(A, \frac{1}{k}\right)\right\|\left[\exp\left(\frac{1}{k}\|A\|\right) + \frac{1}{k^2}\left\|T\left(A, \frac{1}{k}\right)\right\|\right]^{k-1} \\
&\leq \frac{1}{2k}\|A\|^2 \exp\left(\frac{1}{k}\|A\|\right)\left[\exp\left(\frac{1}{k}\|A\|\right) + \frac{1}{2k^2}\|A\|^2 \exp\left(\frac{1}{k}\|A\|\right)\right]^{k-1} \\
&\leq \frac{1}{2k}\|A\|^2 \exp\left(\frac{1}{k}\|A\|\right) \exp\left(\frac{k-1}{k}\|A\|\right)\left[1 + \frac{1}{2k^2}\|A\|^2\right]^{k-1} \\
&\leq \frac{1}{2k}\|A\|^2 \exp(\|A\|)\left[1 + \frac{1}{2k^2}\|A\|^2\right]^{k-1}
\end{aligned}$$

On peut vérifier facilement que $\lim_{k\to\infty}\left[1 + \frac{1}{2k^2}\|A\|^2\right]^{k-1} = 1$, d'où $\lim_{k\to\infty}\left(I_n + \frac{1}{k}A\right)^k = \exp(A)$.

(c) Notons $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $C_1, C_2, ..., C_n$ les colonnes de A. Alors $\det = \det_{\mathscr{B}} \circ l$ où $l(A) = (C_1, C_2, ..., C_n)$, donc $\det$ est continue, comme composée d'applications continues (l linéaire et $\det_{\mathscr{B}}$ n-linéaire en dimension finie).
On sait que le polynôme caractéristique de A s'écrit
$$\chi_A(X) = \det(XI_n - A) = X^n - \operatorname{tr}(A)X^{n-1} + ... + (-1)^n \det(A),$$
donc si $x \neq 0$, $\det(I_n + xA) = (-x)^n \chi_A\left(\frac{-1}{x}\right) = 1 + \operatorname{tr}(A)x + o(x)$, en particulier :
$$\det\left(I_n + \frac{1}{k}A\right) = 1 + \frac{\operatorname{tr}(A)}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right).$$
Par continuité de $\det$, on a donc :
$$\det\exp(A) = \lim_{k\to\infty}\det\left(I_n + \frac{1}{k}A\right)^k = \lim_{k\to\infty}\left(1 + \frac{\operatorname{tr}(A)}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right)\right)^k = \exp(\operatorname{tr}(A)).$$

•••••••••