Devoir surveillé $n°5$
Correction

Exercice

1. Soit $\alpha \in]0,1[$ fixé. Pour $t \in [-\alpha, \alpha]$, on a $|t| \leq \alpha$, donc $|t|^n \leq \alpha^n \leq \alpha$, d'où $1 + t^n \geq 1 - \alpha$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [-\alpha, \alpha],\ |u_n(t)| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}.$$

Comme $\alpha \in]0,1[$, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\alpha^n}{1-\alpha}$ converge. Ainsi, pour tout α de $]0,1[$, la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge normalement sur $[-\alpha, \alpha]$. Les fonctions u_n étant toutes continues sur $]-1,1[$, donc sur $[-\alpha, \alpha]$, on en déduit que la fonction somme S est continue sur $[-\alpha, \alpha]$, puisque la convergence est normale, donc uniforme, sur cet intervalle, cela valant pour tout α de $]0,1[$, on a ainsi S est continue sur $]-1,1[$.

2. (a) Soit $x \geq 1$ fixé. On a $|f_k(x)| = \sum_{n=1}^{E(x)} t^{(k+1)n}$ et $t \in [0,1[$, on obtient donc

$$\forall n \in [\![1, E(x)]\!],\ \ t^{(k+2)n} = t^n t^{(k+1)n} \leq t^{(k+1)n},$$

il en résulte, en sommant, que

$$|f_{k+1}(x)| \leq |f_k(x)|.$$

De plus, pour tout $n \geq 1$, $\lim_{k\to+\infty} t^{(k+1)n} = 0$ et donc la suite $(|f_k(x)|)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante, de limite nulle.

On déduit du résultat précédent que la série numérique $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k(x)$ est une série alternée convergeant par application du théorème spécial des séries alternées.

La série de fonctions $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k$ converge donc simplement sur $[1, +\infty[$ et le théorème spécial des séries alternées donne une majoration du reste de rang N que l'on note R_N :

$$\forall x \in [1, +\infty[,\ |R_N(x)| \leq |f_{N+1}(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} t^{(N+2)n} = \frac{t^{N+2}}{1-t^{N+2}}.$$

Ce dernier majorant est indépendant de x et tend vers 0 lorsque N tend vers l'infini, par conséquent, la série de fonctions $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k$ converge uniformément sur $[1, +\infty[$.

(b) Par définition de S, on a, pour t fixé dans $[0,1[$, $S(t) = \lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{E(x)} u_n(t)$, mais

$$u_n(t) = \frac{t^n}{1-(-t^n)} = t^n \sum_{k=0}^{\infty} (-t^n)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{(k+1)n},$$

donc, puisqu'il s'agit pour x fixé d'un nombre fini de séries convergentes :

$$S(t) = \lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{E(x)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{(k+1)n} = \lim_{x\to+\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{E(x)} (-1)^k t^{(k+1)n} = \lim_{x\to+\infty} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x).$$

Pour tout k, f_k admet en $+\infty$ la limite $(-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} t^{(k+1)n} = (-1)^k \dfrac{t^{k+1}}{1-t^{k+1}} = v_k(t)$, comme la série de fonctions $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k$ converge uniformément sur $[1,+\infty[$ le théorème de la double limite montre que la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} v_k(t)$ converge et que $\lim_{x\to+\infty} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t)$. Finalement

$$S(t) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t),$$

cela pour tout t de $[0,1[$.

3. Soient k dans $\mathbb{N}$ et t dans $[0,1]$, on a $t^{k+2} \leq t^{k+1}$ et $1+t+\ldots+t^{k+2} \geq 1+t+\ldots+t^{k+1}$ (car $t^{k+2} \geq 0$), par conséquent $|w_{k+1}(t)| \leq |w_k(t)|$, de plus, $\forall j \in [\![0,k]\!]$, $t^j \geq t^{k+1}$, d'où

$$|w_k(t)| \leq t^{k+1}(k+1)t^{k+1} = \frac{1}{k+1}.$$

Cette majoration uniforme par rapport à $t \in [0,1]$ permet d'établir comme au 2)a), grâce au théorème spécial des séries alternées, que la série de fonctions $\sum_{k\in\mathbb{N}} w_k$ converge uniformément sur $[0,1]$.

4. Par construction, on a

$$\forall t \in [0,1[(1-t)S(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(1-t)v_k(t) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k(t).$$

Or, pour tout k, w_k admet en 1 la limite $\dfrac{(-1)^k}{k+1}$, comme la série de fonctions $\sum_{k\in\mathbb{N}} w_k$ converge uniformément sur $[0,1]$, les w_k étant continues sur $[0,1]$, la fonction somme est continue sur $[0,1]$ et en particulier

$$\lim_{t\to 1} \sum_{k=0}^{\infty} w_k(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}.$$

La somme de cette dernière série vaut $\ln 2$. En rassemblant les deux résultats précédents, on obtient $\lim_{t\to 1^-} (1-t)S(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2)$, d'où

$$S(t) \underset{1}{\sim} \frac{\ln 2}{1-t}.$$

Problème

Partie I

Partie I : Une décomposition de la matrice X

1. (a) V est une matrice à coefficients réels et symétrique (${}^tV = {}^t(X{}^tX) = X{}^tX = V$), donc elle est diagonalisable d'après le théorème spectral.

Soit λ une valeur propre et $v \in E_p$ un vecteur propre non nul associé à λ, donc $Vv = \lambda v$ et ${}^t vVv = \lambda {}^t vv$. Or ${}^t vVv = {}^t vX{}^tXv = {}^t({}^tXv){}^tXv = \|{}^tXv\|^2$, ainsi

$$\lambda = \frac{\|{}^tXv\|^2}{\|v\|^2} \geq 0,$$

car $v \neq 0$. Les valeurs propres de V sont donc positifs ou nuls.
Soit $(v_1, v_2, ..., v_p)$ une base orthonormale de E_p constituée de vecteurs propres de V respectivement associés aux valeurs propres $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p$. Or $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ étant des valeurs propres de V, donc il existe une permutation σ de $\{1, 2, ..., p\}$ telle que, pour tout $i \in \{1, 2, ..., p\}$, $\lambda_i = \alpha_{\sigma(i)}$. Posons alors pour tout $i \in \{1, 2, ..., p\}$, $e_i = v_{\sigma(i)}$. $(e_1, e_2, ..., e_p)$ est toujours une base orthonormale de E_p et elle est constituée de vecteurs propres de V respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$.

(b)
- Soit $v \in \ker \Phi_V$, donc $\Phi_V(v) = {}^tXXv = 0$ et alors ${}^tvX{}^tXv = {}^t({}^tXv){}^tXv = \|{}^tXv\|^2 = 0$. Ainsi $\Phi_{{}^tX}(v) = 0$ et $v \in \ker \Phi_{{}^tX}$. Par conséquent $\ker \Phi_V \subset \ker \Phi_{{}^tX}$.
  Soit $v \in \ker \Phi_{{}^tX}$, ${}^tXv = 0$ donc $X{}^tXv = X0 = 0$, alors $Vv = 0$ et $v \in \ker \Phi_V$. D'où $\ker \ker \Phi_{{}^tX} \subset \ker \Phi_V$ et par suite $\ker \Phi_{{}^tX} = \ker \Phi_V$
- On a $\operatorname{rg} V = \operatorname{rg} \Phi_V = \operatorname{rg} \Phi_{{}^tX} = \operatorname{rg} {}^tX = \operatorname{rg} X$. Rappelons que r est la dimension du sous-espace vectoriel F engendré par les colonnes $c_1, c_2, ..., c_n$ de X, donc $r = \operatorname{rg}(X)$.
- On sait que $r < p$ donc $\dim \ker \Phi_V = p - r > 0$. 0 est donc valeur propre de Φ_V. Comme $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_p$ nécessairement $\lambda_p = 0$. Alors $\{i \in [\![1, p]\!] / \lambda_i = 0\}$ est non vide. Posons $s = \min\{i \in [\![1, p]\!] / \lambda_i = 0\}$.
  Si $s = 1$, alors $0 = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_p$ et donc $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_p = 0$, ainsi Φ est l'endomorphisme nul ce qui est absurde, donc $s > 1$. Alors
  $$\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_{s-1} > 0 \text{ et } \lambda_s = \lambda_{s+1} = ... = \lambda_p = 0.$$
  Or $\forall i \in [\![1, s-1]\!]$, $e_i = \dfrac{1}{\lambda_i}\Phi_V(e_i) = \Phi_V\left(\dfrac{e_i}{\lambda_i}\right) \in \operatorname{Im} \Phi_V$. Ainsi $(e_1, e_2, ..., e_{s-1})$ est une famille libre de $\operatorname{Im} \Phi_V$, donc $s - 1 \leq \dim \operatorname{Im} \Phi_V = r$, soit donc $s - 1 \leq r$.
  D'autre part, $\forall i \in [\![s, p]\!]$, $e_i \in \ker \Phi_V$, donc $(e_s, e_{s+1}, ..., e_p)$ est une famille libre de $\ker \Phi_V$. D'où $p - (s-1) \leq \ker \Phi_V = p - r$, donc $r \leq s - 1$. Finalement, $r = s - 1$ ou encore $s = r + 1$.
  Alors
  $$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_{s-1} > 0$$
  et
  $$\lambda_{r+1} = \lambda_{r+2} = ... = \lambda_p = 0.$$
- Pour montrer que $(e_1, e_2, ..., e_r)$ est une base de F il suffit de prouver que les éléments de cette famille sont dans F, car $(e_1, e_2, ..., e_r)$ est une famille libre de r éléments et $\dim F = r$.
  On a $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $e_i = \Phi_V\left(\dfrac{e_i}{\lambda_i}\right)$ donc $e_i \in \operatorname{Im} \Phi_V$. Montrons alors que
  $$\operatorname{Im} \Phi_V \subset F = \operatorname{Vect}(c_1, c_2, ..., c_n) = \operatorname{Im} \Phi_X.$$
  Soit $v' \in \operatorname{Im} \Phi_V$, alors il existe $v \in E_p$ tel que $v' = \Phi_V(v) = Vv = X({}^tXv) = \Phi_X({}^tXv) \in \operatorname{Im} \Phi_X$. Alors $\operatorname{Im} \Phi_V \subset \operatorname{Im} \Phi_X = F$.
  Par conséquent, $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $e_i \in F$. $(e_1, e_2, ..., e_r)$ est une famille libre de cardinal r constituée d'éléments de F et F est de dimension r. Donc $(e_1, e_2, ..., e_r)$ est une base de F.

2. Pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, on a :
$$\sum_{i=1}^{p} P_{D_{e_i}}(e_j) = e_i = Id_{E_p}(e_i)$$
Alors les endomorphismes $\sum_{i=1}^{p} P_{D_{e_i}}$ et Id_{E_p} de E_p coïncident sur la base $(e_1, e_2, ..., e_p)$ de E_p. Il sont donc égaux. Alors $\sum_{i=1}^{p} \pi_i = I_p$.

3. Soit (i, j) un élément de $[\![1, p]\!]^2$ tel que $i \neq j$. On a :
$$\forall x \in E_p, \quad (\pi_i \pi_j)(x) = \pi_i((x|e_j)e_j) = (x|e_j)\pi_i(e_j) = (x|e_j)0 = 0.$$
Donc, pour tout $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$ tel que $i \neq j$, $\pi_i \pi_j = 0$.

4. Soit $i \in [r+1, p]$. On a $X \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ et $\pi_i \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ donc $\pi_i X \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. $\pi_i X$ est la matrice, relativement aux bases canoniques de $\mathscr{M}_{n,1}$ et $\mathscr{M}_{p,1}$, de $P_{D_{e_i}} \circ \Phi_X$.
On rappelle que $\operatorname{Im} \Phi_X = \operatorname{Vect}(c_1, c_2, ..., c_n) = F = \operatorname{Vect}(e_1, e_2, ..., e_r)$ et on remarque que
$$\forall k \in [\![1, r]\!], P_{D_{e_i}}(e_k) = 0 \text{ (} i \in [\![r+1, p]\!] \text{)}$$
et ainsi $P_{D_{e_i}}$ est nulle sur F.
Φ_X prend ses valeurs dans F et $P_{D_{e_i}}$ est nulle sur F donc $P_{D_{e_i}} \circ \Phi_X$ est l'application linéaire nulle de $\mathscr{M}_{n,1}$ dans $\mathscr{M}_{p,1}$, donc $\pi_i X = 0$. Ainsi $\forall i \in [r+1, p]$, $\pi_i X = 0$.
D'après ce qui précède, on a :
$$X = I_p X = \sum_{i=1}^{p} \pi_i X = \sum_{i=1}^{r} \pi_i X.$$

5. (a) Soit $s \in [\![1, r]\!]$ fixé. On a $\Phi_{X_s} = \sum_{i=1}^{s} \Phi_{\pi_i} \circ \Phi_X$ et $\Phi_X \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_{n,1}, \mathscr{M}_{p,1})$, donc :
$$\operatorname{Im} \Phi_{X_s} = \Phi_{X_s}(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})) = \sum_{i=1}^{s} \Phi_{\pi_i}\left(\Phi_X(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}))\right) = \sum_{i=1}^{s} \Phi_{\pi_i}(\operatorname{Im} \Phi_X) = \sum_{i=1}^{s} \Phi_{\pi_i}(F).$$
Or $\forall i \in [1, s]$, $\Phi_{\pi_i}(F) = \Phi_{\pi_i}(\operatorname{Vect}(e_1, e_2, ..., e_r)) = \operatorname{Vect}(\Phi_{\pi_i}(e_1), \Phi_{\pi_i}(e_2), ..., \Phi_{\pi_i}(e_r)) = \operatorname{Vect}(e_i)$, donc
$$\operatorname{Im} \Phi_{X_s} = \sum_{i=1}^{s} \operatorname{Vect}(e_i) \subset \operatorname{Vect}(e_1, e_2, ..., e_s).$$

(b) Pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, on a $X_s({}^tXe_j) = \sum_{i=1}^{s} \left(\pi_i X {}^tX e_j\right) = \sum_{i=1}^{s} (\pi_i V e_j) = \lambda_j \sum_{i=1}^{s} (\pi_i e_j)$, d'où :
$$\forall j \in [\![1, s]\!], \quad X_s({}^tXe_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j > s \\ \lambda_j e_j & \text{si } j \leq s. \end{cases}$$
Ceci montre que $\forall j \in [\![1, s]\!]$, $\lambda_j e_j \in \operatorname{Im} \Phi_{X_s}$, donc $e_j \in \operatorname{Im} \Phi_{X_s}$ ($\lambda_j \neq 0$). Alors
$$\operatorname{Vect}(e_1, e_2, ..., e_s) \subset \operatorname{Im} \Phi_{X_s} \subset \operatorname{Vect}(e_1, e_2, ..., e_s)$$
Finalement, $\operatorname{Im} \Phi_{X_s} = \operatorname{Vect}(e_1, e_2, ..., e_s)$. La famille $(e_1, e_2, ..., e_s)$ étant libre, donc $\dim \operatorname{Im} \Phi_{X_s} = s$ et $\operatorname{rg} \Phi_{X_s} = s$. Alors $\operatorname{rg}(X_s) = s$.

Partie II : Une norme euclidienne de matrices carrées

1. Soient $(M,N,R)\in\mathscr{M}_{p,n}^3(\mathbb{R})$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Notons que ${}^tN\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $M\in\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ donc $M^tN\in\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$. M^tN est donc une matrice carrée, ainsi $\Theta(M,N)$ est bien défini. De plus, on a les propriétés suivantes :

- $$\begin{aligned}\Theta(\lambda M+N,R) &= \operatorname{tr}(\lambda M+N)^tR) = \operatorname{tr}(\lambda M^tR)+\operatorname{tr}(N^tR)\\ &= \lambda\operatorname{tr}(M^tR)+\operatorname{tr}(N^tR) = \lambda\Theta(M,R)+\Theta(N,R)\end{aligned}$$

- $$\Theta(M,N)=\operatorname{tr}(M^tN)=\operatorname{tr}({}^t(M^tN)=\operatorname{tr}(N^tM)=\Theta(N,M)$$

- Posons $M=(m_{ij})_{\substack{1\le j\le n\\1\le i\le p}}$ et $M^tM=(c_{ij})_{1\le i,j\le p}$, alors $\Theta(M,M)=\operatorname{tr}(M^tM)=\displaystyle\sum_{i=1}^p c_{ii}=\sum_{i=1}^p\sum_{j=1}^n m_{ij}^2$, ainsi $\Theta(M,M)\ge 0$.

- Supposons $\Theta(M,M)=0$, alors $\displaystyle\sum_{i=1}^p\sum_{j=1}^n m_{ij}^2=0$. Comme $\forall(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,n]\!]$, $m_{ij}^2\ge 0$, alors $\forall(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,n]\!]$, $m_{ij}=0$ et donc $M=0$.

Ainsi Θ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$.

2. Soit $(i,j)\in[\![1,p]\!]^2$. $\Theta(\pi_iX,\pi_jX)=\operatorname{tr}(\pi_iX^tX^t\pi_j)=\operatorname{tr}(\pi_iV\pi_j)$.
La matrice de Φ_{π_j} dans la base orthonormale $(e_1,e_2,...,e_p)$ est diagonale donc symétrique. Donc Φ_{π_j} est un endomorphisme symétrique de E_p, donc sa matrice π_j dans la base canonique de E_p, qui est une base orthonormale, est symétrique. Alors ${}^t\pi_j=\pi_j$, d'où

$$\Theta(\pi_iX,\pi_jX)=\operatorname{tr}(\pi_jV\pi_j).$$

Posons $l=\Phi_{\pi_i}\circ\Phi_V\circ\Phi_{\pi_j}$.
Si $k\in[\![1,p]\!]$ et $k\ne j$, alors $l(e_k)=0$ et $l(e_j)=\lambda_j\Phi_{\pi_i}(e_j)=\begin{cases}0 & \text{si } j\ne i\\ \lambda_ie_i & \text{si } j=i\end{cases}$ Ainsi si $i\ne j$, $l=0$, car $\forall k\in[\![1,p]\!]$, $l(e_k)=0$. Si $i=j$, $\forall k\in[\![1,p]\!]$, $l(e_k)=\begin{cases}0 & \text{si } k\ne i\\ \lambda_ie_i & \text{si } k=i\end{cases}$ alors l coïncide avec $\lambda_i\Phi_{\pi_i}$ sur la base $(e_1,e_2,...,e_p)$ de E_p. Donc $l=\lambda_i\Phi_{\pi_i}$ et donc

$$\Phi_{\pi_i}\circ\Phi_V\circ\Phi_{\pi_j}=\begin{cases}0 & \text{si } i\ne j\\ \lambda_i\Phi_{\pi_i} & \text{si } i=j\end{cases}$$

et donc

$$\pi_iV\pi_j=\begin{cases}0 & \text{si } i\ne j\\ \lambda_i\pi_i & \text{si } i=j\end{cases}$$

et par conséquent

$$\Theta(\pi_iX,\pi_jX)=\begin{cases}0 & \text{si } i\ne j\\ \operatorname{tr}(\lambda_i\pi_i) & \text{si } i=j\end{cases}$$

$\operatorname{tr}(\lambda_i\pi_i)=\lambda_i\operatorname{tr}(\pi_i)$. π_i est la matrice de Φ_{π_i} dans la base canonique de E_p, elle est donc semblable à la matrice π_i' de Φ_π dans la base $(e_1,e_2,...,e_p)$. Or $\forall k\in[\![1,p]\!]$, $\Phi_{\pi_i}(e_k)=\begin{cases}0 & \text{si } k\ne i\\ e_i & \text{si } k=i\end{cases}$ π_i' est donc la matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont nuls sauf le i-ème que vaut 1. Alors $\operatorname{tr}(\pi_i)=\operatorname{tr}(\pi_i')=1$. Finalement

$$\forall(i,j)\in[\![1,p]\!]^2,\ \ \Theta(\pi_iX,\pi_jX)=\begin{cases}0 & \text{si } i\ne j\\ \lambda_i & \text{si } i=j\end{cases}$$

3. Soit $s \in [\![1, r]\!]$, $\|X - X_s\|^2 = \Theta(X - X_s, X - X_s)$. Or $X - X_s = \sum_{i=1}^{r} \pi_i X - \sum_{i=1}^{s} \pi_i X$, donc si $s = r$, alors $X_s = X$ et $\|X - X_s\| = 0$.

Supposons $s < r$. $X - X_s = \sum_{i=s+1}^{r} \pi_i X$, donc

$$\begin{aligned}\Theta(X - X_s, X - X_s) &= \Theta\left(\sum_{i=s+1}^{r} \pi_i X, \sum_{j=s+1}^{r} \pi_j X\right) \\ &= \sum_{i=s+1}^{r}\sum_{j=s+1}^{r} \Theta(\pi_i X, \pi_j X) \\ &= \sum_{i=s+1}^{r} \Theta(\pi_i X, \pi_i X) \\ &= \sum_{i=s+1}^{r} \lambda_i.\end{aligned}$$

Ainsi $\forall s \in [\![1, r]\!]$, $\|X - X_s\|^2 = \begin{cases} 0 & \text{si } s = r \\ \sum_{i=s+1}^{r} \lambda_i & \text{si } s < r \end{cases}$.

Partie III : Approximation de X par une matrice de rang inférieur ou égal à s dans $(\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R}), \Theta)$

1. $(X-N)^t(X-N) \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique réelle, donc il existe une base orthonormale $(a_1, a_2, ..., a_p)$ de E_p constituée de vecteurs propres de $(X - N)^t(X - N)$ respectivement associée aux valeurs propres $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_p$ avec $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq ... \geq \gamma_p$.

2. (a) On sait que

$$\begin{aligned}\dim(G_i \cap \mathrm{Vect}(a_i, ..., a_p)) &= \dim(G_i) + \dim \mathrm{Vect}(a_i, ..., a_p) - \dim(G_i + \mathrm{Vect}(a_i, ..., a_p) \\ &\geq \dim(G_i) + \dim \mathrm{Vect}(a_i, ..., a_p) - p\end{aligned}$$

car $G_i + \mathrm{Vect}(a_i, ..., a_p)$ est un sous-espace vectoriel de E_p qui est de dimension p. Par conséquent

$$\begin{aligned}\dim(G_i \cap \mathrm{Vect}(a_i, ..., a_p)) &\geq \dim(G_i) + \dim \mathrm{Vect}(a_i, ..., a_p) - p \\ &\geq i + (p - (i - 1)) - p = 1.\end{aligned}$$

(b) Alors $G_i \cap \mathrm{Vect}(a_i, ..., a_p)$ est un sous-espace vectoriel distinct de $\{0\}$, ce sous-espace vectoriel contient donc au moins un vecteur unitaire u, $u \in G$ et $u \in \mathrm{Vect}(a_i, ..., a_p)$, donc il existe des scalaires $x_i, ..., x_p$ tels que $u = \sum_{k=i}^{p} x_k a_k$, donc

$$\|{}^t(X - N)u\|^2 = \left({}^t(X - N)u|{}^t(X - N)u\right) = {}^t\left({}^t(X - N)u\right) {}^t(X - N)u = (u|(X - N){}^t(X - N)u)$$

Or

$$(X - N){}^t(X - N)u = (X - N){}^t(X - N)\left(\sum_{k=i}^{p} x_k a_k\right) = \sum_{k=i}^{p} x_k \gamma_k a_k.$$

Comme $(a_1, a_2, ..., a_p)$ est une base orthonormale de E_p

$$(u|(X-N)^t(X-N)u) = \sum_{k=i}^{p} x_k^2\gamma_k$$

et $\|u\|^2 = \sum_{k=i}^{p} x_k^2 = 1$ alors

$$\|{}^t(X-N)u\|^2 = \sum_{k=i}^{p} x_k^2\gamma_k \leq \sum_{k=i}^{p} x_k^2\gamma_i = \gamma_i.$$

Ainsi, il existe un vecteur unitaire u de G tel que $\|{}^t(X-N)u\|^2 \leq \gamma_i$.

(c)
- On a $\dim H \geq \dim\ker \Phi_{{}^tN} + \dim \operatorname{Vect}(e_1, ..., e_{s+i}) - p = \dim\ker \Phi_{{}^tN} + s + i - p$. Rappelons que $\operatorname{rg}{}^tN = \operatorname{rg} N \leq s$. Alors le théorème du rang donne $\dim\ker \Phi_{{}^tN} \geq p - s$ et donc

$$\dim H \geq p - s + s + i - p = i.$$

- Appliquons alors (b) avec $G = H$. On peut donc trouver un vecteur unitaire u de H tel que

$$\|{}^t(X-N)u\|^2 \leq \gamma_i.$$

Comme $u \in H$, alors ${}^tNu = 0$ et donc

$$\|{}^t(X-N)u\|^2 = \|{}^tXu\|^2 = {}^t({}^tXu){}^tXu = {}^tuVu$$

Donc

$${}^tuVu \leq \gamma_i$$

Posons $u = \sum_{k=1}^{s+i} y_k e_k$ avec $(y_1, ..., y_{s+i}) \in \mathbb{R}^{s+i}$, alors ${}^tuVu = \sum_{k=1}^{s+i} y_k^2\lambda_k$ et $\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{s+i} y_k^2 = 1$.

D'où

$$\gamma_i \geq^t uVu = \sum_{k=1}^{s+i} y_k^2\lambda_k \geq \left(\sum_{k=1}^{s+i} y_k^2\right)\lambda_{s+i}$$

Finalement,

$$\lambda_{s+i} \leq \gamma_i.$$

3. (a) La matrice de $\Phi_{(X-N){}^t(X-N)}$ dans la base $(a_1, a_2, ..., a_p)$ est la matrice diagonale $\operatorname{diag}(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_p)$. Donc $(X-N){}^t(X-N)$ est semblable à $\operatorname{diag}(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_p)$, et par conséquent :

$$\operatorname{tr}((X-N){}^t(X-N) = \operatorname{tr}(\operatorname{diag}(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_p)) = \sum_{i=1}^{p} \gamma_i.$$

Ainsi

$$\|X-N\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \gamma_i.$$

(b) D'après ce qui précède $\forall i \in [\![1, r-s]\!]$, $\lambda_{s+i} \leq \gamma_i$ et on a

$$\forall i \in [\![1, p]\!],\ \|{}^t(X-N)a_i\|^2 = {}^ta_i(X-N){}^t(X-N)a_i = \gamma_i^t a_i a_i = \gamma_i\|a_i\|^2 = \gamma_i,$$

donc $\gamma_i \geq 0$. Alors

$$\|X-N\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \gamma_i \geq \sum_{i=1}^{r-s} \gamma_i \geq \sum_{i=1}^{r-s} \lambda_{s+i} = \sum_{i=s+1}^{r} \lambda_i.$$

D'où

$$\|X-N\|^2 \geq \sum_{i=s+1}^{r} \lambda_i.$$

(c) Rappelons que pour $s \in [\![1, r-1]\!]$, $\|X - X_s\|^2 = \sum_{i=s+1}^{r} \lambda_i$. Ainsi

$\diamond$ $X_s \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$,
$\diamond$ $\mathrm{rg}(X_s) = s$,
$\diamond$ $\forall N \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, $\mathrm{rg}\, N \leq s \Rightarrow \|X - X_s\|^2 = \sum_{i=s+1}^{r} \lambda_i \leq \|X-N\|^2$. En conclusion :

$$\|X - X_s\|^2 = \sum_{i=s+1}^{r} \lambda_i = \inf_{N \in \mathscr{S}} \|X-N\|^2,$$

où $\mathscr{S}$ est l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, de rang inférieure ou égal à s. Ainsi X_s réalise la meilleure approximation de X par des matrices de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang inférieur ou égal à s au sens de la norme $\|.\|$ associe au produit scalaire Θ.

●●●●●●●●