Devoir surveillé $n°6$
Correction

Problème I

I - Préliminaire

1. Puisque la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$ les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$ sont de même nature. Pour tout $t \geq 1$, on a $e^{-t^2} \leq e^{-t}$. La convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t$ entraîne donc celle de $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$.

2. (a) La fonction $\phi : (x,t) \mapsto \dfrac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[\times[0,1]$ et admet une dérivée partielle par rapport à x : $\dfrac{\partial \phi}{\partial x} : (x,t) \mapsto -2xe^{-(t^2+1)x^2}$ qui est continue, donc l'application g est de classe $\mathscr{C}^1$ et $\forall x \geq 0$,

$$g'(x) = -2x\int_0^1 e^{-(t^2+1)x^2}\mathrm{d}t = -2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-(tx)^2}\mathrm{d}t,$$

ce qui, après le changement de variable $u = tx$, donne $g'(x) = -2f'(x)f(x)$. En intégrant, on en déduit $\forall x \geq 0,\ \ g(x) - g(0) = -(f^2(x) - f^2(0))$, donc

$$g(x) = \frac{\pi}{4} - f^2(x).$$

(b) Les inégalités $0 \leq g(x) \leq e^{-x^2}\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ entraînent $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$, et la fonction f étant positive, on en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{4}}$$

ce qui s'écrit aussi :

$$J = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

II - Généralités et premiers exemples

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$, justifier la définition de $\widehat{f}(x)$ revient à montrer que la fonction $\varphi_x : t \mapsto e^{-ixt}f(t)$ est intégrable sur $]-\infty,+\infty[$. Or φ_x est continue sur $\mathbb{R}$, comme f, et on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ |\varphi_x(t)| = |f(t)|.$$

Par conséquent, φ_x est intégrable sur $]-\infty,+\infty[$, puisque f l'est. $\widehat{f}$ est donc bien définie sur $\mathbb{R}$.

(b) Supposons f paire et à valeurs réelles. x étant fixé dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\widehat{f}(x) \overset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}f(t)\mathrm{d}t \overset{u=-t}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixu}f(-u)\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixu}f(u)\mathrm{d}u$$

car f est paire. D'où :

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}f(t)\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}f(t)\mathrm{d}t\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(xt)f(t)\mathrm{d}t.$$

On en déduit, en particulier, que si f est paire et à valeurs réelles, alors $\widehat{f}$ également. De même, pour f impaire, on obtient

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t)\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} f(t)\mathrm{d}t\right) = -i\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(xt) f(t)\mathrm{d}t.$$

On en déduit aussi que si f est impaire et à valeurs réelles, alors $\widehat{f}$ est impaire à valeurs imaginaires pures.

2. (a) La fonction p est continue sur $]-\infty, +\infty[$ et intégrable sur $]-\infty, +\infty[$ car elle est continue sur le segment $[-1, 1]$ et nulle en dehors de ce segment, donc p appartient à $\mathscr{I}$.

(b) p étant paire, donc, d'après le résultat de 1.(b) :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \widehat{p}(x) = 2\mathrm{Re}\left(\int_0^1 e^{ixt}(1-t)\mathrm{d}t\right).$$

d'où, après une intégration par parties :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \widehat{p}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{2}{x}(1-\cos(x)) & \text{si } x \neq 0 \end{cases}.$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2}{x}(1-\cos x) = 1$, p est continue sur $\mathbb{R}$, de plus, p est paire, elle est donc intégrable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle l'est sur $\mathbb{R}^+$. Comme p est continue sur $[0, 1]$, il suffit de montrer qu'elle est intégrable sur $[1, +\infty[$, or, d'après l'expression obtenue ci-dessus, on a $\widehat{p}(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, donc par comparaison à une intégrale de Riemann, $\widehat{p}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et donc $\widehat{p} \in \mathscr{I}$.

3. (a) De même, on a E_n continue sur $\mathbb{R}$, paire et $E_n(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, d'où, grâce au 1.(b), $E_n \in \mathscr{I}$ et

$$\widehat{E}_n(x) = 2\mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{ixt} E_n(t)\mathrm{d}t\right) = 2\mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} t^n e^{-(1-ix)t}\mathrm{d}t\right) = 2\mathrm{Re}(K_n).$$

(b) À l'aide d'une intégration par parties, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $K_n = \dfrac{n}{\alpha} K_{n-1}$. Par ailleurs, une simple récurrence donne :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ K_n = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}.$$

(c) D'après (a) et (b), on a :

$$\widehat{E}_n(x) = 2\mathrm{Re}\left(\frac{n!}{(1-ix)^{n+1}}\right) = 2\mathrm{Re}\left(\frac{n!}{(1+x^2)^{n+1}}(1+ix)^{n+1}\right),$$

il en résulte en particulier :

$$\widehat{E}_0(x) = \frac{2}{1+x^2},$$

$$\widehat{E}_1(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2},$$

et

$$\widehat{E}_2(x) = \frac{4(1-3x^2)}{(1+x^2)^3}.$$

(d) On a $1 + ix = \sqrt{1+x^2}e^{i\arctan x}$, d'où :

$$\widehat{E}_n(x) = \frac{2(n!)\cos[(n+1)\arctan x]}{(1+x^2)^{\beta(n)}},$$

avec $\beta(n) = \dfrac{n+1}{2}$.

(e) D'après l'expression précédente, $\widehat{E}_n$ est paire, continue sur $\mathbb{R}$ et $\widehat{E}_n(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^{n+1}}\right)$, cela permet de conclure que $\widehat{E}_n$ est dans $\mathscr{I}$ pour $n \geq 1$. Pour $n = 0$, $\widehat{E}_0$ a été explicité au (c) et appartient aussi à $\mathscr{I}$, donc $\widehat{E}_n$ appartient à $\mathscr{I}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

III - Transformée de Fourier de $\mathscr{H}_0$

1. $\mathscr{H}_0$ est paire, continue sur $\mathbb{R}$ et intégrable sur $\mathbb{R}^+$, car $e^{\frac{-t^2}{2}} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. De plus, on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t \overset{t=u\sqrt{2}}{=} \sqrt{2}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\mathrm{d}u = \sqrt{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Donc, compte tenu de la parité, la fonction $\mathscr{H}_0$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{H}_0(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} \mathscr{H}_0(t)\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}.$$

2. (a) Pour les mêmes raisons que la fonction $\mathscr{H}_0$ ci-dessus, g_n appartient à $\mathscr{I}$ pour tout n dans $\mathbb{N}$.

(b) Une intégration par parties donne :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ I_{n+1} = (2n+1)I_n.$$

D'où, par une récurrence immédiate, pour n dans $\mathbb{N}$:

$$I_n = (2n-1)(2n-3)...3.1.I_0 = \frac{(2n)!}{2^n n!}I_0.$$

Comme $I_0 = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{I_n}{(2n)!} = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{2^n n!}.$$

3. La série en question n'est autre que la série exponentielle $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\left(\frac{-x^2}{2}\right)^n}{n!}$ qui est convergente et a pour somme $\mathscr{H}_0(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}$.

4. La fonction $t \mapsto e^{\frac{-t^2}{2}}\cos(xt)$ est continue, majorée en valeur absolue par $\mathscr{H}_0$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}$ d'après ce qui précède, donc elle est intégrable sur $]-\infty, +\infty[$.

5. Fixons x réel. D'après I-1.(b), $\mathscr{H}_0$ étant paire, on a :

$$\widehat{\mathscr{H}_0}(x) = 2\int_0^{+\infty}\cos(xt)e^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(xt)^{2n}}{(2n)!}e^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}g_n(t)\mathrm{d}t.$$

Appliquons sur $[0, +\infty[$ le théorème d'intégration terme à terme à la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R}^+,\ u_n(t) = (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}g_n(t).$$

• La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$, par construction, sa somme étant la fonction $t \mapsto \cos(xt)e^{\frac{-t^2}{2}}$, qui est continue sur $[0, +\infty[$.

- Les u_n sont continues sur $[0,+\infty[$, intégrables sur $[0,+\infty[$, avec d'après 2.(b), $\displaystyle\int_0^{+\infty}|u_n(t)| = \frac{x^{2n}}{2^n n!}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.
- La série numérique de terme général $\displaystyle\int_0^{+\infty}|u_n(t)|$ converge (encore une série exponentielle, de somme $\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{x^2}{2}}$).

On en conclut que la fonction somme est intégrable sur $[0,+\infty[$ (résultat déjà prouvé au 3.) et que

$$\int_0^{+\infty}\cos(xt)e^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}g_n(t)\mathrm{d}t,$$

d'où

$$\widehat{\mathscr{H}_0}(x) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\int_0^{+\infty}t^{2n}e^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t.$$

6. D'après 5. et 2.(b), on obtient :

$$\widehat{\mathscr{H}_0}(x) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}I_n = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2^n n!}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2\pi}e^{\frac{-x^2}{2}},$$

cela pour tout réel x, autrement dit :

$$\widehat{\mathscr{H}_0} = \lambda_0\mathscr{H}_0,$$

avec $\lambda_0 = \sqrt{2\pi}$.

Problème II

1. (a) Soit l'événement B_3 : « choisir chaque année la région 2 durant les 3 premières années. » On a donc

$$B_3 = A_2(1)\cap A_2(2)\cap A_2(3).$$

La formule des probabilités composées donne

$$p(B_3) = p\left[A_2(1)\right]\times p\left[A_2(2)/A_2(1)\right]\times p\left[A_2(3)/A_2(1)\cap A_2(2)\right].$$

D'après l'hypothèse 5, $p\left[A_2(3)/A_2(1)\cap A_2(2)\right] = p\left[A_2(3)/A_2(2)\right]$, donc

$$p(B_3) = \alpha_2(1)\times a_{22}^2 = 0,45\times(0,3)^3 = 0,0405.$$

De même, $B_n = A_2(1)\cap A_2(2)\cap\ldots\cap A_2(n)$, donc toujours d'après la formule des probabilités composées,

$$p(B_n) = p\left[A_2(1)\right]\prod_{i=1}^{n-1}p\left[A_2(i+1)/A_2(i)\right] = 0,45\times(0,3)^{n-1}.$$

(b) Le système $\{A_1(1),A_2(1),A_3(1)\}$ étant complet d'après les hypothèses 1 et 2, donc d'après la formule de Bayes :

$$\begin{aligned} p\left[A_2(1)/A_1(2)\right] &= \frac{p\left[A_1(2)/A_2(1)\right]\times p\left[A_2(1)\right]}{\sum\limits_{i=1}^{3}p\left[A_1(2)/A_i(1)\right]\times p\left[A_i(1)\right]} \\ &= \frac{0,45\times 0,1}{0,2\times 0,3+0,45\times 0,1+0,35\times 0,6} \\ &= \frac{9}{63}\sim 0,143. \end{aligned}$$

(c) Soit C l'événement : « l'individu change de région entre la première et la deuxième année. » On a :

$$\overline{C} = [A_1(1) \cap A_1(2)] \cup [A_2(1) \cap A_2(2)] \cup [A_3(1) \cap A_3(2)] .$$

$$\begin{aligned} 1 - p(C) &= p\left[A_1(1)/A_1(2)\right] \times p\left[A_1(2)\right] + p\left[A_2(1)/A_2(2)\right] \times p\left(A_2(2)\right] + p\left[A_3(1)/A_3(2)\right] \times p\left[A_3(2)\right] \\ &= \alpha_1(1)a_{11} + \alpha_1(1)a_{11} + \alpha_1(1)a_{11} = 0,265 \end{aligned}$$

Soit $p(C) = 0,735$.

2. (a) Le système $\{A_1(n), A_2(n), A_3(n)\}$ étant complet d'après les hypothèses 1 et 2, donc d'après la formule de Bayes, on a pour tout $i \in [\![1,3]\!]$:

$$p\left[A_i(n+1)\right] = \sum_{j=1}^{3} p\left[A_i(n+1)/A_j(n)\right] \times p\left[A_j(n)\right] .$$

Soit $\forall i \in [\![1,3]\!]$, $\alpha_i(n+1) = \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij}\alpha_j(n)$ ce qui exprime légalité matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1(n+1) \\ \alpha_2(n+1) \\ \alpha_3(n+1) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \alpha_1(n) \\ \alpha_2(n) \\ \alpha_3(n) \end{pmatrix} .$$

Soit en réécrivant toutes ces relations aux temps $t = n$, $t = n-1$ jusqu'à $t = 2$:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1(n) \\ \alpha_2(n) \\ \alpha_3(n) \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} \alpha_1(1) \\ \alpha_2(1) \\ \alpha_3(1) \end{pmatrix} .$$

(b) Calculons :

$$\begin{aligned} \det(M) &= \begin{vmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,6 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,5 & -0,2 & -0,3 \\ 0,2 & 0,4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0,2 & -0,3 \\ 0,4 & 0 \end{vmatrix} = 0,12. \end{aligned}$$

Soit $\det(M) = 0,12$.

(c) Cherchons le polynôme caractéristique de M :

$$\begin{aligned} P(\lambda) = \det(\lambda I_3 - M) &= \begin{vmatrix} \lambda - 0,3 & -0,1 & -0,6 \\ -0,5 & \lambda - 0,3 & -0,2 \\ -0,2 & -0,6 & \lambda - 0,2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & \lambda - 1 & \lambda - 1 \\ -0,5 & \lambda - 0,3 & -0,2 \\ -0,2 & -0,6 & \lambda - 0,2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -0,5 & \lambda - 0,3 & -0,2 \\ -0,2 & -0,6 & \lambda - 0,2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0,5 & \lambda + 0,2 & 0,3 \\ -0,2 & -0,4 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda + 0,2 & 0,3 \\ -0,4 & \lambda \end{vmatrix} . \end{aligned}$$

Soit $\det(M) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 0,2\lambda + 0,12)$. Les valeurs propres de M sont les racines du polynôme caractéristique, elles sont donc 1, $-0,1 + i\sqrt{0,11}$ et $-0,1 - i\sqrt{0,11}$.

(d) M admet trois valeurs propres distinctes complexes, donc elle est diagonalisable dans $\mathbb{C}$, soit P la matrice de passage de la base initiale à la base de vecteurs propres. On a donc

$$M = PDP^{-1} \text{ et } M^n = PD^nP^{-1}$$

avec $D = \operatorname{diag}(1, \lambda, \overline{\lambda})$ ($\lambda = -0,1 + i\sqrt{0,11}$). La première colonne de P est un vecteur propre associée à la valeur propre 1. Vérifions que le vecteur de composantes $(1, 1, 1)$ est vecteur propre associé à 1. Calculons :

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,6 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice de passage est bien du type :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & x' & x'' \\ 1 & y' & y'' \\ 1 & z' & z'' \end{pmatrix} \text{ et } M = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^n & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\lambda}^n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

3. (a) L'application linéaire $X \mapsto PXP^{-1}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ étant continue (propriété des applications linéaires continues en dimension finie), alors comme $|\lambda| < 1$,

$$\lim_{n\to\infty} M^n = P \lim_{n\to\infty} \operatorname{diag}\left(1, \lambda^n, \overline{\lambda}^n\right) P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Or

$$P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & x' & x'' \\ 1 & y' & y'' \\ 1 & z' & z'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ a & a' & a'' \\ a & a' & a'' \end{pmatrix}.$$

Soit $\lim\limits_{n\to\infty} M^n = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ a & a' & a'' \\ a & a' & a'' \end{pmatrix}$.

(b) Soit $W = UV = (w_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}$. Pour tout $j \in [\![1, 3]\!]$,

$$\sum_{i=1}^{3} w_{ij} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} u_{ik}v_{kj} = \sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} v_{kj}u_{ik} = \sum_{k=1}^{3} u_{ik}\left(\sum_{j=1}^{3} v_{kj}\right) = 1.$$

Donc la somme des éléments de chaque colonne de UV est 1.

(c) En utilisant le résultat de la question précédente, on montre par récurrence sur n que la somme des éléments de chaque colonne de M^n est 1.

Posons $M^n = \left(m_{ij}^{(n)}\right)_{1\leq i,j\leq 3}$ et $L = (l_{ij})_{1\leq i,j\leq 3} = \lim\limits_{n\to\infty} M^n$. On a alors, pour tout $j \in [\![1, 3]\!]$, $\sum\limits_{i=1}^{3} m_{ij}^{(n)} = 1$, donc par passage à la limite on obtient : $\sum\limits_{i=1}^{3} l_{ij} = 1$. Ainsi par unicité de la limite $3a = 3a' = 3a'' = 1$, soit donc $a = a' = a'' = \dfrac{1}{3}$.

(d) Par continuité de l'application linéaire $X \mapsto X \begin{pmatrix} \alpha_1(1) \\ \alpha_2(1) \\ \alpha_3(1) \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$\lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} \alpha_1(n) \\ \alpha_2(n) \\ \alpha_3(n) \end{pmatrix} = \left(\lim_{n\to\infty} M^{n-1}\right) \begin{pmatrix} \alpha_1(1) \\ \alpha_2(1) \\ \alpha_3(1) \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,45 \\ 0,35 \end{pmatrix}.$$

Soit $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_1(n) = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_2(n) = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_3(n) = \dfrac{1}{3}$.

•••••••••••