Devoir surveillé $n°03$
Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

Exercice

Soit a un réel positif ou nul. On considère la matrice $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a-2 & a & 1 \\ a & -1 & 1 & a \\ 0 & 0 & -a & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

1. On a $A(0) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Il est clair que $\chi_{A(0)}(X) = (X-1)(X+1)(X^2+1)$, donc 1 et -1 sont les seuls valeurs propres réelles de $A(0)$.
Pour tout $X = {}^t(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, on a :

$$(A - \lambda I)X = 0 \iff \begin{cases} (1-\lambda)x - 2y + t = 0 \\ (-1-\lambda)y + z = 0 \\ -\lambda z + t = 0 \\ -z - \lambda t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (1-\lambda)x - 2y + t = 0 \\ (-1-\lambda)y + z = 0 \\ t = \lambda z \\ -\left(1+\lambda^2\right)z = 0 \end{cases}$$

$$\iff (1) \begin{cases} (1-\lambda)x - 2y = 0 \\ (-1-\lambda)y = 0 \\ t = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{car } 1+\lambda^2 \neq 0.$$

- Si $\lambda = -1$ alors $(1) \iff \begin{cases} x = y \\ t = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ donc -1 est valeur propre associé au sous espace propre $\mathrm{Vect}((1,1,0,0))$
- si $\lambda = 1$ alors $(1) \iff y = z = t = 0$ donc 1 est valeur propre associé au sous espace propre $\mathrm{Vect}(1,0,0,0)$

Dans la suite, on suppose $a > 0$.

2. On a $\chi_{A(a)}(X) = (X^2+1+a(a-2))(X^2+aX+1) = (X^2-(a-1)^2)(X^2+aX+1)$, donc λ est une valeur propre de $A(a)$ si, et seulement si, $\lambda^2 = (a-1)^2$ ou $\lambda^2 + a\lambda + 1 = 0$.

3. (a) $A(a)$ n'est pas inversible si, et seulement si, 0 est valeur propre. Donc si $a = 1$ (la seconde équation n'a pas de solution si $\lambda = 0$).

(b) Si $a = 1$, les valeurs propres sont $\lambda = 0$ et les solutions de $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$. Donc la seule valeur propre de $A(1)$ est 0. Si $A(1)$ était diagonalisable, on aurait $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ avec D diagonale nulle ! donc $A(1) = 0$ ce qui n'est pas le cas. Donc $A(1)$ n'est pas diagonalisable.

4. On suppose dans cette question que $a > 2$.

(a) Les valeurs propres sont alors $a-1$ et $1-a$ et les racines de $\lambda^2 + a\lambda + 1 = 0$ qui sont $\lambda = \dfrac{-a \pm \sqrt{a-4}}{2}$ car $\Delta = a - 4 > 0$. En conclusion, $A(a)$ possède 4 valeurs propres distinctes deux à deux.

(b) Comme $A(a)$ est d'ordre 4, $A(a)$ est donc diagonalisable.

Problème I

1. $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $f^2(e_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$. On doit donc calculer le rang de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Le calcul du déterminant ou le Pivot de Gauss ($L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$) donne le résultat : $(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ est une base de E.

2. $f^3(e_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f^4(e_1) = e_1$ de plus $(e_1, f(e_1), f^2(e_1), f^3(e_1))$ est bien générateur, car les trois premiers vecteurs forment une base de E. f est donc cyclique d'ordre 4.

3. On a $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ puis $A^4 = (A^2)^2 = I_3$. Donc $f^4 = \mathrm{id}_E$.

4.

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-1 & -2 & -2 \\ -1 & X-1 & -2 \\ -2 & -2 & X+3 \end{vmatrix} = (X+1)(X^2+1).$$

Les trois valeurs propres $-1, i, -i$ appartient à $\mathbb{C}$, elles sont toutes trois simples, la matrice A est donc diagonalisable, semblable à :

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

Cherchons les valeurs propres :

• à $\lambda = 1$ correspond le système :

$$\left\{ \begin{array}{c} x + 2y + 2z = -x \\ x + y + 2z = -y \\ -2x - 2y - 3z = -z \end{array} \right. \quad \text{d'où} \left\{ \begin{array}{c} x = 0 \\ z = -y \end{array} \right.$$

• à $\lambda = -1$ correspond le système :

$$\left\{ \begin{array}{c} x + 2y + 2z = ix \\ x + y + 2z = iy \\ -2x - 2y - 3z = iz \end{array} \right. \quad \text{d'où} \left\{ \begin{array}{c} x = 5y \\ z = 2y \end{array} \right.$$

• à $\lambda = 2$ correspond le système :

$$\left\{ \begin{array}{c} x + 2y + 2z = -ix \\ x + y + 2z = -iy \\ -2x - 2y - 3z = -iz \end{array} \right. \quad \text{d'où} \left\{ \begin{array}{c} x = 4z \\ z = 2z \end{array} \right.$$

Les sous-espaces propres relatifs aux valeurs propres $-1, i, -i$ sont donc respectivement $\mathrm{Vect}(v_1)$, $\mathrm{Vect}(v_2)$, $\mathrm{Vect}(v_3)$ avec $v_1 = (0, 1, -1)$, $v_2 = (1-i, 1, -1+i)$ et $v_3 = (1+i, 1, -1-i)$. Désignons par $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$ la base de vecteurs propres, la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}$ sera donc :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1-i & 1+i \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1+i & -1-i \end{pmatrix}$$

On pourra calculer P^{-1} et vérifier que :

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Partie II : Cas général

1. $(x_0, f(x_0), ..., f^{p-1}(x_0))$ est un cycle de f, donc c'est un système générateur. Son cardinal est donc supérieur à la dimension de l'espace vectoriel : $p \geq n$.

2. Pour prouver que deux endomorphismes sont égaux il suffit de le prouver pour les vecteurs d'une base. Comme on peut extraire une base de la famille génératrice $f^i(x_0), i = 0, 1, ..., p-1$ il suffit pour montrer $f^p = \mathrm{id}_E$ de montrer $\forall i \in [\![0, p-1]\!]$ $f^p\left(f^i(x_0)\right) = f^i(x_0)$. Or $f^p\left(f^i(x_0)\right) = f^i(f^p(x_0)) = f^i(x_0)$ d'après l'hypothèse $f^p(x_0) = x_0$, donc f^{p-1} est donc de façon évidente la fonction réciproque de f^p : $f^{p-1} \circ f = f \circ f^{p-1} = \mathrm{id}_E$. $f^p = \mathrm{id}_E$ et f est bijective

3. (a) Par définition de m, $(x_0, f(x_0), ..., f^{m-1}(x_0))$ est libre et $(x_0, f(x_0), ..., f^{m-1}(x_0), f^m(x_0))$est lié. Il existe donc une combinaison linéaire $\displaystyle\sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i f^i(x_0) = 0$ avec la famille $(\lambda_i)_{i=0,1,...,m} \neq (0)$. Si $\lambda_m = 0$ on a $\displaystyle\sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i f^i(x_0) = 0$ et donc $\forall i, \lambda_i = 0$ (famille libre) : absurde donc $\lambda_m \neq 0$ et $f^m(x_0) = \displaystyle\sum_{i=0}^{m-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_m} f^i(x_0)$.

(b) Pour $k = m$ on vient de montrer que $f^m(x_0)$ est combinaison linéaire des $(x_0, f(x_0), ..., f^{m-1}(x_0))$. Supposons alors $f^k(x_0) \in \text{Vect}(x_0, f(x_0), ..., f^{m-1}(x_0))$, il existe donc des μ_i tels que $f^k(x_0) = \sum_{i=0}^{m-1} \mu_i f^i(x_0)$. Si on compose par f on a

$$f^{k+1}(x_0) = \sum_{i=0}^{m-1} \mu_i f^{i+1}(x_0) = \sum_{i=1}^{m-1} \mu_{i-1} f^i(x_0) + \mu_{m-1} f^m(x_0) = \sum_{i=1}^{m-1} \mu_{i-1} f^i(x_0) + \mu_{m-1} \left(\sum_{i=0}^{m-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_m} f^i(x_0) \right)$$

Donc $f^{k+1} \in \text{Vect}(x_0, f(x_0), ..., f^{m-1}(x_0))$.
En conclusion, $\forall k \geq m$, $f^k(x_0) \in \text{Vect}(x_0, f(x_0), ..., f^{m-1}(x_0))$.

(c) Nous venons de voir que pour tout élément k de $[\![m, +\infty[\![$ le vecteur $f^k(x_0)$ est combinaison linéaire des m vecteurs $x_0, f(x_0), ..., f^{m-1}(x_0)$. Ceci vaut également pour k dans $[\![0, m-1]\!]$. Ainsi tous les éléments de la famille génératrice $(x_0, f(x_0), ..., f^{p-1}(x_0))$ sont combinaisons linéaires de la famille $(x_0, f(x_0), ..., f^{m-1}(x_0))$. Alors

$$E = \text{Vect}(x_0, f(x_0), ..., f^{p-1}(x_0)) \subset \text{Vect}(x_0, f(x_0), ..., f^{m-1}(x_0) \subset E.$$

Ainsi $\text{Vect}(x_0, f(x_0), ..., f^{m-1}(x_0)) = E$. La famille $(x_0, f(x_0), ..., f^{m-1}(x_0))$ est donc une famille génératrice de E. Rappelons que par définition de m elle est libre. $(x_0, f(x_0), ..., f^{m-1}(x_0))$ est donc une base de E de cardinal m.
Comme E est de dimension n, alors $(x_0, f(x_0), ..., f^{m-1}(x_0))$ est une base de E et $m = n$.

4. (a) g est un polynôme de l'endomorphisme f ainsi que f^k donc f^k et g commutent et donc, par définition de g, on a :

$$g(f^k(x_0) = f^k(g(x_0)) = f^k(f^n(x_0)) = f^{k+n}(x_0).$$

On a aussi

$$g(f^k(x_0)) = f^n(f^k(x_0).$$

Les deux applications g et f^n sont égales pour tout vecteur de la base $\mathscr{B}' = (x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0))$. Elles sont donc égales $g = f^n$.

(b) On a $f\left(f^{n-1}(x_0)\right) = f^n(x_0) = a_0x_0 + a_1f(x_0) + a_2f^2(x_0) + \; + a^{n-1}f^{n-1}(x_0)$. D'où

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

5. (a) Dans ce cas $f^n(x_0) = x_0$ donc $a_0 = 1$ et pour tout $i > 0$, $a_i = 0$.

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Si $f(v) = \lambda v$ on a par récurrence immédiate $\forall k \in \mathbb{N}$, $f^k(v) = \lambda^k v$. En particulier $v = f^n(v) = \lambda^n v$. Or v est non nul donc $\lambda^n = 1$.

(c) Soit x_k tel que $\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(x_k) =^t (\alpha_0, \alpha_, ..., \alpha_{n-1})$. On doit étudier le système $f(x_k) = \lambda_k x_k$, qui s'écrit :

$$\alpha_{n-1} = \lambda_k \alpha_0$$

$$\forall i \in [\![1, n-2]\!], \quad \alpha_{i-1} = \lambda_k \alpha_i$$

On a donc

$$\alpha_{n-2} = \lambda_k^2 \alpha_0, \alpha_{n-3} = \lambda_k^3 \alpha_0, ..., \alpha_1 = \lambda_k^{n-1} \alpha_0.$$

D'où

$$\ker(f - \lambda_k \text{id}_E) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_k^{n-1} \\ \vdots \\ \lambda_k^2 \\ \lambda_k \end{pmatrix}.$$

(d) Si $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k x_k = 0$. On a en composant par f^i :$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \lambda_k^i x_k = 0$. Soit alors $P = \sum_{i=0}^{d} p_i X^i$. On a $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k P(\lambda_k) x_k = \sum_{i=0}^{d} p_i \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \lambda_k^i x_k = 0$.
On prend alors pour P un polynôme d'interpolation de Lagrange

$$P_j = \prod_{i=0, \neq j}^{n-1} \frac{X - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}$$

pour avoir $P_j(\lambda_j) = 1$ et $P_j(\lambda_i) = 0$ si $i \neq j$. On a alors $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k P_j(\lambda_k) x_k = \alpha_j x_j$ et donc $\alpha_j = 0$ car $x_j \neq 0$. Les vecteurs $(x_0, x_1, ..., x_{n-1})$ forment donc une famille libre, et donc une base de E car le cardinal est $n = \dim(E)$.

(e) la matrice de f dans cette base est diagonale avec les (λ_k) sur la diagonale.

Problème II

1. La suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{ngeqn_0}$ est décroissante et minorée par 0, donc, elle converge. En particulier, elle est bornée, donc majorée. Soit $C > 0$ un majorant de cette suite. On peut écrire :

$$\forall n \geq n_0, \ \frac{u_n}{v_n} \leq C.$$

On en déduit que $\forall n \geq n_0, \ u_n \leq C v_n$, donc, que $u_n = O(v_n)$. D'après le cours sur les séries à termes positifs, on peut donc conclure : ($\sum v_n$ converge) $\Rightarrow$ ($\sum u_n$ converge) et ($\sum u_n$ diverge) $\Rightarrow$ ($\sum v_n$ diverge).

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut écrire :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

On en déduit que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\alpha - \beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

On trouve donc l'équivalent :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} \sim \frac{\alpha - \beta}{n}.$$

3. (a) Soit $\beta > 1$. Considérons un réel $\alpha]1, \beta[$. Le réel $\alpha - \beta$ est strictement négatif, donc, d'après la question précédente, la suite de terme général $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n}$ est négative à partir d'un certain rang, c'est-à-dire :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq n_0, \ \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

Or, puisque $\alpha > 1$, la série de Riemann $\sum v_n$ est convergente, donc, d'après la première question, la série $\sum u_n$ converge également. On peut donc conclure :

$$\text{Si } \beta > 1, \text{ la série } \sum u_n \text{ est convergente.}$$

Soit maintenant $\beta < 1$. Considérons un réel $\alpha]\beta, 1[$. Le réel $\alpha - \beta$ est strictement négatif, donc, d'après la question précédente, la suite de terme général $\frac{v_{n+1}}{v_n} - \frac{u_{n+1}}{u_n}$ est négative à partir d'un certain rang, c'est-à-dire :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq n_0, \ \frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

Or, puisque $\alpha < 1$, la série de Riemann $\sum v_n$ est divergente, donc, d'après la première question, la série $\sum u_n$ diverge également. On peut donc conclure :

Si $\beta < 1$, la série $\sum u_n$ est divergente.

(b) ♦ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \dfrac{2.4.6...2n}{3.5.7...(2n+1)}$. On trouve :

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{2.4.6.2n.2(n+1)}{3.5.7...(2n+1).(2n+3)} \times \frac{3.5.7...(2n+1)}{2.4.6....2n} \\
&= \frac{2n+2}{2n+3} \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{3}{2n}\right)^{-1} \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{3}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= 1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

On se retrouve donc dans le cadre de la question précédente avec $\beta = \dfrac{1}{2} < 1$. On peut donc conclure que la série $\sum \dfrac{2.4.6.2n}{3.5.7.(2n+1)}$ est divergente.

♦ Soit $a > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \dfrac{n.n!}{(a+1).(a+2)...(a+n)}$. On trouve :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{n(a+n+1)} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+(a+1)n} = \left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{a+1}{n}\right)^{-1}$$
$$= \left(1+\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1-\frac{a+1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{-1} = 1-\frac{a-1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

On doit donc envisager trois cas :

• Si $a < 2$, alors, $a-1 < 1$, donc la série $\sum u_n$ est divergente.

• Si $a > 2$, alors, $a-1 > 1$, donc la série $\sum u_n$ est convergente.

• Si $a = 2$, alors, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{2n}{(n+1)(n+2)} \sim \dfrac{2}{n}$, donc, par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ est divergente. Finalement la série $\sum \dfrac{n.n!}{(a+1).(a+2).(a+n)}$ converge si et seulement si $a > 2$.

4. (a) Tout d'abord, on peut écrire $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|\dfrac{v_n}{n}| \leq |v_n|$. Or, d'après les hypothèses, la série la série $\sum |v_n|$ est convergente, donc, par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum |\dfrac{v_n}{n}$ converge, donc la série $\sum \dfrac{v_n}{n}$ converge

Intéressons-nous à la seconde série. D'après les hypothèse, la série $\sum |v_n|$ converge. Son terme général tend donc vers 0, ce qui permet d'écrire :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \ \ \forall n \geq n_0, \ \ |v_n| \leq 1$$

Donc $\forall n \geq n_0, \ \ 0 \leq (v_n)^2 \leq |v_n|$ Là encore, par comparaison de séries à termes positifs, on peut conclure que la série $\sum (v_n)^2$ converge

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
a_{n+1}-a_n &= \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{n}+v_n\right) \\
&= \frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\left(-\frac{1}{n}+v_n+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+v_n\right)^2+o\left(\frac{1}{n}+v_n\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{n^2}+v_n+\frac{v_n}{n}-\frac{1}{2}v_n^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right)+o\left(\frac{1}{n^2}+v_n^2-\frac{2v_n}{n}\right)
\end{aligned}$$

D'après les hypothèses et la question précédente, tous les termes en présence sont des termes généraux de séries convergentes, donc la série $\sum(a_{n+1} - a_n)$ converge.

D'après le théorème de comparaison suites-séries, on déduit de la question précédente que la suite (a_n) est convergente. Posons $l = \lim\limits_{n\to 8} a_n$. On a donc $\lim\limits_{n\to\infty} nu_n = e^l$, donc, $u_n \sim \dfrac{e^l}{n}$. Ainsi, en posant $K = e^l$, on peut conclure que $u_n \sim \dfrac{K}{n}$. Par comparaison de séries à termes positifs, on conclut donc que la série $\sum u_n$ est divergente

(c) On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(1+\frac{3}{2n}\right)^{-2} = \left((1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\left((1-\frac{3}{n}+\frac{27}{4n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

Après simplifications, on trouve :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1-\frac{1}{n}+\frac{7}{4n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On se trouve donc sous les hypothèses de la question 3 avec $v_n = \dfrac{7}{4n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ qui est bien le terme général d'une série absolument convergente. On peut donc conclure que la série $\sum\left[\dfrac{2.4.6.2n}{3.5.7.(2n+1)}\right]^2$ est divergente.

• • • • • • • • • • •