Devoir surveillé $n^\circ 02$
Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

•••••••••••

Partie I : Préliminaire

1. Remarquons d'abord que $a_n \neq 0$ puisque P est de degré n. La décomposition en facteurs irréductibles de P s'écrit $P(X) = a_n(X - x_1)(x - x_2)(X - x_n)$. En développant et en identifiant les coefficients d'ordre $n-1$ et d'ordre 0, on obtient le résultat annoncé.

2. (a) Les cinq racines de l'équation polynomiale $z^5 - 1 = 0$ dans $\mathbb{C}$ sont les racines cinquième de l'unité à savoir : $1, e^{\frac{2i\pi}{5}}, e^{\frac{4i\pi}{5}}, e^{\frac{6i\pi}{5}} = e^{\frac{-4i\pi}{5}}, e^{\frac{8i\pi}{5}} = e^{\frac{-2i\pi}{5}}$.

(b) $z^5 - 1 = (z-1)Q(z)$ où $Q(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4$.

(c) i. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
Q(z) &= z^2\left(z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}\right) && (1)\\
&= z^2\left(z^2 + \frac{1}{z^2} + z + \frac{1}{z} + 1\right) && (2)\\
&= z^2\left[\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2 + z + \frac{1}{z} + 1\right] && (3)\\
&= z^2\left[\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{z}\right) + 1\right] && (4)
\end{aligned}$$

Comme 0 n'est une racine de Q, il vient :

$$\begin{aligned}
Q(z) = 0 &\Leftrightarrow u = z + \frac{1}{z} \text{ et } u^2 + u - 1 = 0 && (5)\\
&\Leftrightarrow u = z + \frac{1}{z} \text{ et } u \in \left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\} && (6)\\
&\Leftrightarrow z^2 - uz + 1 = 0 \text{ et } u \in \left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\} && (7)\\
&\Leftrightarrow z^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}z + 1 = 0 \text{ ou } z^2 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}z + 1 = 0 && (8)
\end{aligned}$$

On résout aisément ces deux équations du second degré. On obtient donc les quatre racines complexes de Q qui sont :

$$\frac{-1-\sqrt{5}+i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}, \frac{-1-\sqrt{5}-i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}, \frac{-1+\sqrt{5}+i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, \frac{-1+\sqrt{5}-i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

ii. D'après les questions précédentes on a :

$$\left\{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right), \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right\} = \left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{4}, \frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right\}$$

et

$$\left\{\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right), \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right\} = \left\{\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, \frac{-1+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right\}.$$

Comme $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) < 0$, alors $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$.
Comme $0 < \frac{\pi}{5} < \frac{2\pi}{5}$, il vient $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) < \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, par conséquent $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{5}$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{5}$.

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

et

$$\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

3. Considérons le polynôme de degré $n-1$ qui a pour racines $a_1, \dots, a_{n-1}$: $P(X) = \prod_{i=1}^{n-1}(X-a_i) = X^{n-1} + \sum_{j=0}^{n-2} c_j X^j$.

Ajoutons à la dernière colonne la première multipliée par c_0, la seconde multipliée par c_1, etc. Par définition de P, ceci va annuler les éléments de la dernière colonne, sauf le dernier :

$$D(a_1,\dots,a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-2} & 0 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-2} & 0 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \dots & a_3^{n-2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \dots & a_{n-1}^{n-2} & 0 \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-2} & P(a_n) \end{vmatrix}$$

Si on développe suivant la dernière colonne, $D(a_1,\dots,a_n) = P(a_n)D(a_1,\dots,a_{n-1})$. Or $P(a_n) = \prod_{i=1}^{n-1}(a_n - a_i)$: d'où le résultat, par récurrence.

Partie II : Sommes de Gauss

1.
- $G_1 = 1$,
- $G_2 = 1 + e^{i\pi} = 0$,
- $G_3 = \sum_{k=0}^{2} e^{\frac{2i\pi k^2}{3}} = 1 + e^{\frac{2i\pi}{3}} + e^{\frac{8i\pi}{3}} = 1 + 2e^{\frac{2i\pi}{3}} = 1 + 2\left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = i\sqrt{3}$,
- $G_4 = 1 + e^{\frac{2i\pi}{4}} + e^{\frac{8i\pi}{4}} + e^{\frac{18i\pi}{4}} = 1 + i + 1 + e^{\frac{i\pi}{2}} = 1 + i + 1 + i = 2(1+i)$,
- $G_5 = 1 + e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{\frac{8i\pi}{5}} + e^{\frac{18i\pi}{4}} + e^{\frac{32i\pi}{5}} = 1 + e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{\frac{-2i\pi}{5}} + e^{\frac{-2i\pi}{4}} + e^{\frac{2i\pi}{5}} = 1 + 4\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \sqrt{5}$.

Soit $r \in \mathbb{Z}$ fixé. On a :

$$\sum_{k=0}^{n} \zeta_n^{kr} = \sum_{k=0}^{n} (\zeta_n^r)^k = \sum_{k=0}^{n} \left(e^{\frac{2i\pi r}{n}}\right)^k$$

Si r est un multiple de n, $e^{\frac{2i\pi r}{n}} = 1$ et donc $\sum_{k=0}^{n} \zeta_n^{kr} = n$.

Si r ne divise pas n, alors la famille $(\zeta_n^{kr})_{0 \le k \le n-1}$ décrit l'ensemble de toutes les racines n-ièmes de l'unité et donc $\sum_{k=0}^{n} \zeta_n^{kr} = 0$.

2. Posons $AB = (c_{rs})_{1 \le r,s \le n}$ et $BA = (d_{rs})_{1 \le r,s \le n}$ avec $c_{rs} = \sum_{k=1}^{n} a_{rk}b_{ks}$ et $d_{rs} = \sum_{k=1}^{n} b_{rk}a_{ks}$. On a

$$\sum_{r=1}^{n} c_{rr} = \sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{rk}b_{kr} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} b_{kr}a_{rk} = \sum_{k=1}^{n} d_{kk}$$

D'où $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

Soit P une matrice inversible telle que $A = PDP^{-1}$, donc $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(PDP^{-1}) = \mathrm{tr}(DP^{-1}P) = \mathrm{tr}(D) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

3. Il est clair que $\mathrm{tr}(A_n) = G_n$.
Posons $A_n^2 = (\alpha_{rs})_{1 \leq r,s \leq n}$, on a :

$$\begin{aligned}
\alpha_{rs} &= \sum_{k=1}^{n} \zeta_n^{(r-1)(k-1)} \zeta_n^{(k-1)(s-1)} && (9)\\
&= \sum_{k=1}^{n} \zeta_n^{(k-1)(r+s-2)} && (10)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\zeta_n^{(r+s-2)}\right)^k && (11)\\
&= \begin{cases} n & \text{si } r+s=2 \text{ ou } r+s=n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} && (12)
\end{aligned}$$

D'où $A_n^2 = n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} = nB_n$.

On voit bien que $B_n^2 = I_n$.

4. Soit λ une valeur propre de A_n, alors il existe un vecteur x non nul tel que $Ax = \lambda x$ et donc

$$A^2 x = A(\lambda x) = \lambda A x = \lambda^2 x,$$

ce qui montre que λ^2 est une valeur propre de A^2.
Soit λ une valeur propre de A_n, donc λ^4 est une valeur propre de $A_n^4 = (nB_n)^2 = n^2 I_n$ et par conséquent $\lambda^4 = n^2$ (1 est l'unique valeur propre de I_n), d'où $\lambda \in \left\{ \sqrt{n}, -\sqrt{n}, i\sqrt{n}, -i\sqrt{n} \right\}$.

5. On a $B_n^2 = I_n$, donc $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de B_n scindé à racines simples, ainsi B_n est diagonalisable.
Comme $B_n \neq I_n$ et $B_n \neq -I_n$, alors ce polynôme est aussi le polynôme minimal de B_n. D'où $\mathrm{Sp}(B_n) = \{-1, 1\}$.
Soit $x = (x_1, x_2, ..., x_{2p+1})$ un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 1$, alors

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 &=& x_1 \\ x_n &=& x_2 \\ x_{n-1} &=& x_3 \\ & \vdots & \\ x_3 &=& x_{n-1} \\ x_2 &=& x_n \end{array}\right.$$

ceci est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_{2p+1} &=& x_2 \\ x_{2p} &=& x_3 \\ & \vdots & \\ x_{p+3} &=& x_p \\ x_{p+2} &=& x_{p+1} \end{array}\right.$$

D'où $E_1(B_n) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2 + e_{2p+1}, e_3 + e_{2p}, ..., e_{p+1} + e_{p+2})$.

Soit maintenant $x=(x_1,x_2,...,x_{2p+1})$ un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda=-1$, alors

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 &=& -x_1\\ x_n &=& -x_2\\ x_{n-1} &=& -x_3\\ &\vdots& \\ x_3 &=& -x_{n-1}\\ x_2 &=& -x_n\end{array}\right.$$

ceci est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 &=& 0\\ x_{2p+1} &=& -x_2\\ x_{2p} &=& -x_3\\ &\vdots& \\ x_{p+3} &=& -x_p\\ x_{p+2} &=& -x_{p+1}\end{array}\right.$$

D'où $E_{-1}(B_n)=\mathrm{Vect}(e_2-e_{2p+1},e_3-e_{2p},...,e_{p+1}-e_{p+2})$. La réunion de deux bases de $E_1(B_n)$ et $E_{-1}(B_n)$ forme une base de vecteurs de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle B_n est diagonale.

6.

$$\begin{aligned} G_n^{r+1}-G_n^r &= \sum_{k=0}^{n-1}\zeta_n^{(r+k+1)^2}-\sum_{k=0}^{n-1}\zeta_n^{(r+k)^2} && (13)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\zeta_n^{(r+k)^2}-\sum_{k=0}^{n-1}\zeta_n^{(r+k)^2} && (14)\\ &= \zeta_n^{(r+n)^2}-\zeta_n^{r^2} && (15)\\ &= \zeta_n^{(r^2+2rn+n^2)}-\zeta_n^{r^2} && (16)\\ &= \zeta_n^{r^2}-\zeta_n^{r^2}=0. && (17)\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall r\in\mathbb{Z}$, $\displaystyle\sum_{s=0}^{n-1}\zeta_n^{(r+s)^2}=\sum_{s=0}^{n-1}\zeta_n^{s^2}$ et par conséquent :

$$\begin{aligned} G_n\overline{G_n} &= \left(\sum_{s=0}^{n-1}\zeta_n^{s^2}\right)\left(\sum_{r=0}^{n-1}\zeta_n^{-r^2}\right) && (18)\\ &= \sum_{r=0}^{n-1}\zeta_n^{-r^2}\left(\sum_{s=0}^{n-1}\zeta_n^{s^2}\right) && (19)\\ &= \sum_{r=0}^{n-1}\zeta_n^{-r^2}\left(\sum_{s=0}^{n-1}\zeta_n^{(r+s)^2}\right) && (20)\\ &= \sum_{r=0}^{n-1}\left(\sum_{s=0}^{n-1}\zeta_n^{(r+s)^2-r^2}\right) && (21)\end{aligned}$$

$$|G_n|^2=\sum_{r=0}^{n-1}\left(\sum_{s=0}^{n-1}\zeta_n^{(r+s)^2-r^2}\right)=\sum_{r=0}^{n-1}\left(\sum_{s=0}^{n-1}\zeta_n^{s(s+2r)}\right)=\sum_{s=0}^{n-1}\zeta_n^{s^2}\sum_{r=0}^{n-1}\zeta_n^{2rs}.$$

La somme interne n'est non nulle seulement si $2s\equiv 0 \pmod n$. Ainsi, si n est impair de la forme $2p+1$, alors $2s\equiv 0(\mathrm{mod}\ \ 2p+1)$, donc $s=0$. D'où $|G_n|^2=\zeta_n^{0^2}\displaystyle\sum_{r=0}^{n-1}\zeta_n^0=n$ et donc $|G_n|=\sqrt{n}$.

7. (a) Les parties $J_n = \{ (p,q) \in [\![1,n]\!]^2 \mid p < q \}$, $D_n = \{ (p,p) \mid p \in [\![1,n]\!]^2 \}$ et $S_n = \{ (p,q) \in [\![1,n]\!]^2 \mid p > q \}$ constituent une partition de l'ensemble $[\![1,n]\!]^2$.

Donc $\displaystyle\sum_{(p,q)\in[\![1,n]\!]^2} (p+q) = \sum_{(p,q)\in J_n} (p+q) + \sum_{(p,q)\in D_n} (p+q) + \sum_{(p,q)\in S_n} (p+q)$. Or clairement $\displaystyle\sum_{(p,q)\in D_n} (p+q) = 2\sum_{p=1}^{n} p$ et $\displaystyle\sum_{(p,q)\in J_n} (p+q) = \sum_{(p,q)\in S_n} (p+q) = c_n$, comme on le voit en intervertissant les rôles de p et q. Il vient

$$\sum_{(p,q)\in[\![1,n]\!]^2} (p+q) = 2c_n + 2\sum_{p=1}^{n} p,$$

c'est-à-dire

$$n\sum_{p=1}^{n} p + n\sum_{p=1}^{n} q = 2c_n + 2\sum_{p=1}^{n} p,$$

soit $c_n = (n-1)\displaystyle\sum_{p=1}^{n} p$, d'où :

$$c_n = \frac{(n-1)n(n+1)}{2}.$$

(b) On a $e^{i\alpha} - 1 = e^{\frac{i\alpha}{2}}\left(e^{\frac{i\alpha}{2}} - e^{\frac{-i\alpha}{2}}\right) = 2ie^{\frac{i\alpha}{2}} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.
D'après la question de la partie préliminaire,

$$\det(A_n) = \prod_{1\le r<s\le n} \left(\zeta_n^{r-1} - \zeta_n^{s-1}\right) = \prod_{1\le r<s\le n} \left[\zeta_n^{r-1}\left(\zeta_n^{s-r} - 1\right)\right]$$

Or

$$\begin{aligned}
\zeta_n^{r-1}\left(\zeta_n^{s-r} - 1\right) &= e^{\frac{2i\pi(p-1)}{n}}\left(e^{\frac{2i\pi(s-r)}{n}} - 1\right) && (22)\\
&= e^{\frac{2i\pi(p-1)}{n}}\left[2ie^{\frac{i\pi(s-r)}{n}} \sin\left(\frac{\pi(s-r)}{n}\right)\right] && (23)\\
&= 2ie^{\frac{i\pi(s+r-2)}{n}} \sin\left(\frac{\pi(s-r)}{n}\right) && (24)\\
&= 2e^{\frac{i\pi}{2}} e^{\frac{i\pi(s+r-2)}{n}} \sin\left(\frac{\pi(s-r)}{n}\right) && (25)
\end{aligned}$$

Donc un argument de $\det(A_n)$ est :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\le r<s\le n} \left(\frac{\pi(s+r-2)}{n} + \frac{\pi}{2}\right) &= \frac{\pi}{n}\sum_{1\le r<s\le n} (r+s) + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{n}\right) \operatorname{card}\{ (r,s) \in [\![1,n]\!]^2 \mid r < s \} && (26)\\
&= \frac{\pi}{n} c_n + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{n}\right)\frac{n(n-1)}{2} && (27)\\
&= \frac{\pi(n-1)}{4}\left[2(n+1) + n - 4\right] && (28)\\
&= (3n-2)(n-1)\frac{\pi}{4} && (29)
\end{aligned}$$

8. La matrice A_n vérifie $A_n^4 - n^2 I_n = 0$ et qu'elle est donc diagonalisable de valeurs propres sont $\sqrt{n}$ $-\sqrt{n}$, $i\sqrt{n}$, $-i\sqrt{n}$.
Soit $U_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} A_n^2$, on a $U_n^2 = \dfrac{1}{n} A_n^2 = B_n$. Donc $\operatorname{tr}(U_n^2) = \operatorname{tr}(B_n) = 1$ et comme B_n est semblable à

$$\begin{pmatrix} I_{a+b} & (0) \\ (0) & I_{c+d} \end{pmatrix}.$$

Donc $\operatorname{tr}(B_n) = (a+b)\times 1 + (c+d)\times(-1) = 1$ et on a bien sûr $a+b+c+d = n$ (la taille de la matrice), donc $2(a+b) = n+1 = 2(p+1)$ et $2(c+d) = n-1 = 2p$. D'autre part, $\operatorname{tr}(U_n) = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\operatorname{tr}(A_n) = (a-b)+i(c-d)$.
Mais $\operatorname{tr}(U_n) = \dfrac{G_n}{\sqrt{n}}$, donc $|\operatorname{tr}(A_n)| = \dfrac{|G_n|}{\sqrt{n}} = 1$ et par conséquent $(a-b)^2 + (c-d)^2 = 1$.
On sait que $\det(A_n) = e^{i\frac{\pi}{4}(3n-2)(n-1)} n^{\frac{n}{2}} = i^{p(6p+1)} n^{\frac{n}{2}}$. Or $i^{6p+1} = i^{3(2p+1)-2} = i^{-2}(i^3)^{2p+1} = i^{2p+1}$. Donc

$$\det(A_n) = i^{p(2p+1)} n^{\frac{n}{2}}.$$

Puisque le déterminant d'une matrice est le produit de ses valeurs propres, on a alors :

$$\det(A_n) = (\sqrt{n})^a(-\sqrt{n})^b(i\sqrt{n})^c(-i\sqrt{n})^d$$

ou encore

$$i^{2b+c+3d} n^{\frac{n}{2}} = i^{p(2p+1)} n^{\frac{n}{2}}.$$

En comparant cela avec l'expression précédente du déterminant et en notant que $3 \equiv -1 \pmod n$, nous obtenons les conditions :

$$2b + c - d \equiv p(2p+1) \pmod 4$$

quand n est impair. Nous utiliserons cette congruence pour déterminer a, b, c, d comme suit :
D'abord la congruence précédent s'écrit aussi :

$$2(b+d) + c + d \equiv p(2p+1) \pmod 4$$

ou encore

$$b + d \equiv p^2 \pmod 2$$

Ainsi, si p est pair $b+d$ est pair et si p est impair $b+d$ est impair.
Supposons n impair et $n \equiv 1 \pmod 4$. Par la question , on sait que $a-b = \pm 1$ et $c-d = 0$. Ainsi 5 et 6 conduisent à

$$a - b = a + b - 2b \equiv \frac{n+1}{2} - \frac{n(n-1)}{2} \pmod 4 = \frac{n+1-n+1}{2} \pmod 4 \equiv 1 \pmod 4$$

donc $a - b = 1$, ce qui prouve que $G_n = \sqrt{n}$ quand $n \equiv 1 \pmod 4$.
Maintenant, supposons $n \equiv 3 \pmod 4$. l'égalité 1 nous dit que $a = b$ et $c - d = \pm 1$ donc 2 et 5 donnent

$$\begin{aligned}
c - d &\equiv \frac{n(n-1)}{2} - 2b \pmod 4 && (30)\\
&\equiv \frac{3(n-1)}{2} - \frac{n+1}{2} \pmod 4 && (31)\\
&\equiv \frac{3n-3n-n-1}{2} \pmod 4 && (32)\\
&\equiv \frac{2n-4}{2} \pmod 4 && (33)\\
&\equiv 1 \pmod 4 && (34)
\end{aligned}$$

donc, $n \equiv 3 \pmod 4$, on en déduit que $G_n = \operatorname{tr}(A_n) = i\sqrt{n}$.

••••••••••