Devoir surveillé $n^\circ 05$
Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

•••••••••••

-I-

1. Posons $\alpha_n = \dfrac{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+n-1)}{(n!)^2}$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\alpha+n}{(n+1)^2} = 0$ et donc le rayon de convergence de cette série entière est infini.

2. (a)
- Si $\alpha = 1$, $\alpha_n = \dfrac{1}{n!}$ et donc $f_1(x) = e^x$.
- Si $\alpha = 0$, $\alpha_n = 0$ pour $k \geq 1$ et donc $f_1(x) = 1$.
- Si $\alpha = -1$, $\alpha_0 = 1, a_1 = -2, a_2 = \dfrac{1}{2}$ et $a_n = 0$ pour $n \geq 3$, donc on a $f_1(x) = 1 - 2x + \dfrac{x^2}{2}$.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \geq n+1$, $\dfrac{(-n)(-n+1)...(-n+k-1)}{(k!)^2} = 0$ puisque l'un des termes du numérateur est nul, de plus $\alpha_n = \dfrac{(-n)(-n+1)...(-1)}{(n!)^2} = \dfrac{(-1)^n}{n!}$ est non nul, donc f_{-n} est un polynôme de degré n.

3. On a $f_{\frac{1}{2}}(-1) = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^3} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^3}$, or cette dernière une série qui satisfait aux hypothèses du théorème des séries alternées, donc la somme partielle $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^3}$ peut être considérée comme une valeur approchée de $f_{\frac{1}{2}}(1)$ avec un erreur absolue inférieure à $\varepsilon_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^3}$.
Avec Maple, on trouve $\varepsilon_5 = \dfrac{21}{10240} > 2.10^{-3}$ et $\varepsilon_6 = \dfrac{77}{245760} < 2.10^{-3}$, on prend donc $S_6 = \dfrac{19807}{30720} \simeq 0,6447591146$ comme valeur approchée de $f_{\frac{1}{2}}(-1)$.

-II-

1. Par théorème du cours y est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et ses dérivées vérifient sur cet intervalle

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$$

et

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}.$$

On a donc

$$0 = x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}(x) + (1-x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x) - \alpha y(x) = (a_1 - \alpha) + 2\sum_{n=2}^{\infty}[n^2a_n - (\alpha+n-1)a_{n-1}]x^{n-1}.$$

On en déduit par unicité du développement en série entière que $a_1 = \alpha$ et pour tout $n \geq 2$,

$$n^2a_n - (\alpha+n-1)a_{n-1},$$

c'est-à-dire

$$a_n = \frac{\alpha+n-1}{n^2}a_{n-1}.$$

Comme on a $a_0 = 1$ les coefficients sont uniquement déterminés :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+n-1)}{(n!)^2}.$$

Et l'on trouve une solution unique $y = f_\alpha$ qui est bien une série de rayon de convergence infini.

2. Si $g(x) = e^x f_\alpha(-x)$, on a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = e^x(f_\alpha(-x) - f'_\alpha(-x))$ et $g''(x) = e^x(f_\alpha(-x) - 2f'_\alpha(-x) + f''_\alpha(-x))$, d'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2}(x) + (1-x)\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x) - \alpha g(x) = -e^x((-x)f''_\alpha(-x) + (1+x)f'_\alpha(-x) - \alpha f_\alpha(-x))$$

or $(-x)f''_\alpha(-x) + (1+x)f'_\alpha(-x) - \alpha f_\alpha(-x) = 0$ d'après la question précédente, d'où $x\dfrac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2}(x) + (1-x)\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x) - \alpha g(x) = 0$, alors cette équation et la condition $g(0) = 1$ entrainent par unicité que $\forall x \in \mathbb{R}, \ g(x) = f_{1-\alpha}(x)$, d'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{1-\alpha}(x) = e^x f_\alpha(x).$$

3. Pour $n \geq 1$ et d'après la question précédente, $f_n(x) = e^x f_{n-1}(-x)$, donc $\dfrac{f_{n+1}(x)}{x f_n(x)} = \dfrac{f_{-n}(-x)}{x f_{-(n-1)}(-x)}$. D'où

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f_{n+1}(x)}{x f_n(x)} = \frac{(-1)^n \alpha_{-n}}{(-1)^{n-1}\alpha_{1-n}} = \frac{1}{n}.$$

-III-

1. La changement de variable $u = \tan(\beta)$, montre que $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+(1-x)u^2}$, puis le changement de variables $v = \sqrt{1-x}u$ conduit à

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}v}{1+v^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{1-x}}.$$

2. (a) L'étude de la fonction $\varphi : u \mapsto (1-u)e^u$ sur $]-\infty, 1[$, montre qu'elle croissante sur $]-\infty, 0]$ et décroissante sur $[0, 1[$, donc on peut conclure que $\forall u < 1$, $\varphi(u) \leq \varphi(0) = 1$ ou encore

$$\forall u < 1, \quad e^u \leq \frac{1}{1-u}.$$

(b) Si $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et $x < 1$, alors $x\sin^2\theta \leq 1$ et donc, d'après l'inégalité de la question précédente, on a :

$$\varphi(x) \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{1 - x\sin^2\theta} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

De plus la fonction sous signe intégral est positive, donc $\varphi(x) \geq 0$.

(c) Pour $x \leq -1$ et $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ posons $u = \sqrt{-x}\sin\theta$. Alors

$$\varphi(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x\sin\theta}\mathrm{d}\theta = \int_0^{\sqrt{-x}} e^{-u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\cos\theta\sqrt{-x}} \overset{\text{car } 0\leq\cos\theta\leq 1}{\geq} \int_0^{\sqrt{-x}} e^{-u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{-x}} \geq \frac{1}{\sqrt{-x}}\int_0^1 e^{-u^2}\mathrm{d}u = \frac{c}{\sqrt{-x}}$$

où $c = \displaystyle\int_0^1 e^{-u^2}\mathrm{d}u > 0$.

3. (a) Pour $k \geq 1$, on a $I_k = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k-1}x \cdot \sin x \mathrm{d}x$. En posant $u(x) = \sin^{2k-1}x$ et $v'(x) = \sin x$ et en intégrant par parties nous obtenons :

$$\begin{aligned} I_k &= \left[-\cos x \cdot \sin^{2k-1} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (2k-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cdot \sin^{2k-2} x \mathrm{d}x \\ &= (2k-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\sin^{2k-2} x \mathrm{d}x \\ &= (2k-1)I_{k-1} - (2k-1)I_k. \end{aligned}$$

Donc $(2k)I_k = (2k-1)I_{k-1}$ ou encore $I_k = \dfrac{2k-1}{2k}I_{k-1}$. D'autre part, $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$, et finalement, pour $k \geq 1$,

$$I_k = \frac{1.3....(2k-1)}{2.4.....(2k)}\frac{\pi}{1} = \frac{\pi}{2}\frac{(2k-1)!}{2^{2k}(k!)^2}\frac{\pi}{2}$$

(b) Pour tout x réel, on a $e^{x\sin\theta} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\sin^{2k}\theta$ et $\forall\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\left|\dfrac{x^k}{k!}\sin^{2k}\theta\right| \leq \dfrac{|x|^k}{k!}$, donc la série converge uniformément par rapport à θ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, donc on peut intégrer terme à terme :

$$\varphi(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}I_k.$$

En remplaçant I_k par sa valeur trouvée précédemment, on obtient :

$$\varphi(x) = \frac{\pi}{2}f_{\frac{1}{2}}(x).$$

(c) L'inégalité de la question **2.2b** de cette partie montre que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f_{\frac{1}{2}}(x) = \lim_{x\to-\infty}\varphi(x) = 0$. De même, la question **2.2b** de cette partie, montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1}\varphi(x)\mathrm{d}x$ est divergente par comparaison avec l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-x}}$, donc il est de même de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f_{\frac{1}{2}}(x)\mathrm{d}x$ et aussi de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f_{\frac{1}{2}}(x)\mathrm{d}x$.

4. $\varphi(-1) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta$. Comme $f_{\frac{1}{2}}(-1) = 0,645 \pm 3.10^{-4}$, alors $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta = 1,013 \pm 10^{-4}$. En particulier, $\varphi(-1) \geq 1,013 > 1$, donc $\varphi(-1) \neq 1$. Mais $1 < \varphi(-1) < 1,02$. Donc en prenant $\varphi(-1) = 1$, on commet une erreur absolue inférieure à 2.10^{-2}.

-IV-

Il est clair que F est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3$ privé du plan (oyz). Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $y^2+z^2 \neq 0$ on a $r \neq 0$ et

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = \frac{-x}{2r^{\frac{5}{2}}}f_\alpha(r) + \frac{x}{r^{\frac{3}{2}}}f'_\alpha(r),$$

et par symétrie, on obtient

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = \frac{-y}{2r^{\frac{5}{2}}}f_\alpha(r) + \frac{y}{r^{\frac{3}{2}}}f'_\alpha(r),$$
$$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = \frac{-z}{2r^{\frac{5}{2}}}f_\alpha(r) + \frac{z}{r^{\frac{3}{2}}}f'_\alpha(r).$$

De même,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y,z) &= \frac{-f_\alpha(r)}{2r^{\frac{5}{2}}} - \left(\frac{x}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)r^{\frac{-7}{2}}\left(\frac{x}{r}\right)f_\alpha(r) - \left(\frac{x}{2r^{\frac{5}{2}}}\right)\left(\frac{x}{r}\right)f'_\alpha(r) + \frac{1}{r^{\frac{3}{2}}}f'_\alpha(r)\\ &\quad -\frac{3}{2}xr^{\frac{-5}{2}}\left(\frac{x}{r}\right)f'_\alpha(r) + \left(\frac{x}{r^{\frac{3}{2}}}\right)\left(\frac{x}{r}\right)f''_\alpha(r),\end{aligned}$$

et par symétrie, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y,z) &= \frac{-f_\alpha(r)}{2r^{\frac{5}{2}}} - \left(\frac{y}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)r^{\frac{-7}{2}}\left(\frac{y}{r}\right)f_\alpha(r) - \left(\frac{y}{2r^{\frac{5}{2}}}\right)\left(\frac{y}{r}\right)f'_\alpha(r) + \frac{1}{r^{\frac{3}{2}}}f'_\alpha(r)\\ &\quad -\frac{3}{2}yr^{\frac{-5}{2}}\left(\frac{y}{r}\right)f'_\alpha(r) + \left(\frac{y}{r^{\frac{3}{2}}}\right)\left(\frac{y}{r}\right)f''_\alpha(r),\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}(x,y,z) &= \frac{-f_\alpha(r)}{2r^{\frac{5}{2}}} - \left(\frac{z}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right) r^{\frac{-7}{2}}\left(\frac{z}{r}\right) f_\alpha(r) - \left(\frac{z}{2r^{\frac{5}{2}}}\right)\left(\frac{z}{r}\right) f'_\alpha(r) + \frac{1}{r^{\frac{3}{2}}} f'_\alpha(r) \\
&\quad -\frac{3}{2} z r^{\frac{-5}{2}}\left(\frac{z}{r}\right) f'_\alpha(r) + \left(\frac{z}{r^{\frac{3}{2}}}\right)\left(\frac{z}{r}\right) f''_\alpha(r).
\end{aligned}
$$

D'où

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 F}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 F}{\partial^2 z} &= \frac{-3 f_\alpha(r)}{2r^{\frac{5}{2}}} + \frac{5}{4}\frac{f_\alpha(r)}{r^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{2}\frac{f'_\alpha(r)}{r^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{2}\frac{f'_\alpha(r)}{r^{\frac{3}{2}}} + 3\frac{f'_\alpha(r)}{r^{\frac{3}{2}}} + \frac{f''_\alpha(r)}{r^{\frac{1}{2}}} \\
&= -\frac{1}{4}\frac{f_\alpha(r)}{r^{\frac{5}{2}}} + \frac{f'_\alpha(r)}{r^{\frac{3}{2}}} + \frac{f''_\alpha(r)}{r^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{1}{r^{\frac{3}{2}}}\left(-\frac{f_\alpha(r)}{4r} + f'_\alpha(r) + r f''_\alpha(r)\right),
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
-\frac{r}{x}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{4r^2}F &= -\frac{r}{x}\left(\frac{-x}{2r^{\frac{5}{2}}} f_\alpha(r) + \frac{x}{r^{\frac{3}{2}}} f'_\alpha(r)\right) + \frac{1}{4r^2}\frac{f_\alpha(r)}{r^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{f_\alpha(r)}{2r^{\frac{3}{2}}} - \frac{f'_\alpha(r)}{r^{\frac{1}{2}}} + \frac{f_\alpha(r)}{4r^{\frac{5}{2}}} \\
&= \frac{1}{r^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{f_\alpha(r)}{2} - r f'_\alpha(r) + \frac{f_\alpha(r)}{4r}\right).
\end{aligned}
$$

Ainsi, F est solution de l'équation aux dérivées partielles $\dfrac{\partial^2 F}{\partial^2 x} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial^2 y} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial^2 z} - \dfrac{r}{x}\dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{1}{4r^2}F = 0$ si, et seulement si, $r f''_\alpha(r) + (1-r) f'_\alpha(r) + \dfrac{1}{2} f_\alpha(r) = 0$, la condition recherchée est donc $\alpha = -\dfrac{1}{2}$.

• • • • • • • • • • •