Devoir surveillé $n^\circ 01$
Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

• • • • • • • • • • •

Problème I

I-Exemples

1. Nous savons que $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +, .)$ est un anneau. Il nous reste alors à montrer que tout élément de $a \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ vérifie $a^2 = a$. Or $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$, donc $0^2 = 0$ et $1^2 = 1$. Il s'agit donc bien d'un anneau de Boole.

2. (a) L'élément neutre pour la loi Δ est l'ensemble vide puisque $\forall A \in \mathscr{P}(E)$, $A\Delta\varnothing = A$. L'élément neutre pour la loi $\cap$ est l'ensemble E puisque $\forall A \in \mathscr{P}(E)$, $A \cap E = A$.

(b) Si E contient plus d'un élément, l'anneau $(\mathscr{P}(E), \Delta, \cap)$ n'est pas intègre. En effet, dans ce cas, on peut considérer $A \subset E$ tel que $A \neq E$ et $A \neq \varnothing$. Dans ce cas, on a $A \cap \overline{A} = \varnothing$ alors que ni A, ni $\overline{A}$ ne sont égaux à $\varnothing$.

II-Étude d'un anneau de Boole

1. Pour tout $a, b \in B$, on a :

$$\begin{aligned}(a+b)^2 = a+b \quad &\Leftrightarrow \quad a^2 + ab + ba + b^2 = a + b \\ &\Leftrightarrow \quad a + ab + ba + b = a + b \text{ car } a^2 = a \text{ et } b^2 = b \\ &\Leftrightarrow \quad ab + ba = 0 \text{ par simplification}\end{aligned}$$

2. Nous avons $(a + a)^2 = a + a$. De la précédente égalité, nous déduisons $a + a = 0$ ou encore $a = -a$.

3. Pour tout $a, b \in B$, on a $ab + ba = 0$. On ajoute ba aux deux membres de l'égalité et en utilisant la précédente question, nous obtenons $ab = ba$.

4. On rappelle que dans un anneau, les deux éléments 0 et 1 sont distincts. Supposons que $B = \{0, 1, a\}$ avec $a \neq 0$ et $a \neq 1$. Alors $a + 1 \neq 0$ car $a \neq -1 = 1$ et $a + 1 \neq 1$ car $a \neq 0$, on aboutit donc à une contradiction. D'où A ne peut pas être de cardinal 3.

5. (a) Soient a, b et c dans B.
• Comme $a^2 = a$, $\mathscr{R}$ est réflexive.
• Si $a\mathscr{R}b$ et $b\mathscr{R}a$, alors $ab = a$ et $ba = b$ et comme B est un anneau commutatif, alors $a = b$ et la relation est donc symétrique.
• Si $a\mathscr{R}b$ et $b\mathscr{R}c$, alors $ab = a$ et $bc = b$ et donc $ac = abc = ab = a$, c'est-à-dire $a\mathscr{R}c$.
Ainsi $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre sur B.

(b) Pour tout a dans B, $0.a = 0$, c'est-à-dire $0\mathscr{R}a$, donc 0 est un plus petit élément. De même, pour tout a dans B, $x.1 = x$, c'est-à-dire $a\mathscr{R}1$, donc 1 est un plus grand élément.

(c) Pour tout A et B deux parties de E, $A\mathscr{R}B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow B \subset A$.

6. Pour tout $(a, b) \in B^2$, on a :

$$ab(a + b) = aba + ab^2 = -a^2b + ab^2 = -ab + ab = 0.$$

7. Soient a et b de B. Si B est intègre alors $ab(a + b) = 0$ implique $a = 0$, $b = 0$ ou $a + b = 0$. Or $a + b = 0$ donne $b = -a = a$. Ainsi, lorsqu'on choisit deux éléments de B, soit l'un deux est nul, soit ils sont égaux. Une telle propriété est impossible B contient plus de 3 éléments. Par suite $\operatorname{card}(B) = 2$.

III-Anneau de Boole et théorie des ensembles

1. Soient m et m' deux éléments distincts de E. De $m \in E$ et $m' \in B$, nous déduisons que $mm' \in \{0, m\}$. D'autre part, de $m' \in E$ et $m \in B$, nous déduisons que $m'm \in \{0, m'\}$. Or, l'anneau de Boole étant commutatif, $mm' = m'm$ et donc, puisque $m \neq m'$ nous en déduisons que $mm' \in \{0, m\} \cap \{0, m'\} = \{0\}$.

2. (a) Soient x et y dans B fixés. Si $m \in \Phi(x) \cap \Phi(y)$ alors $mx = my = m$ et donc par associativité de la loi multiplicative, on obtient

$$m(xy) = (mx)y = my = m,$$

d'où $m \in \Phi(xy)$. Aussi avons-nous $\Phi(x) \cap \Phi(y) \subset \Phi(xy)$.
Réciproquement, soit $m \in \Phi(xy)$. Alors $m(xy) = m$. En multipliant les deux membres par y, nous obtenons : $mxy^2 = my$. Or $y^2 = y$ ce qui nous donne l'égalité $mxy = my$, d'où nous déduisons $m = my$ (car $m \in \Phi(xy)$). Ainsi $m \in \Phi(y)$. De même $m \in \Phi(x)$ en multipliant la précédente égalité par x. D'où :

$$\Phi(xy) = \Phi(x) \cap \Phi(y).$$

(b) Soit $m \in \Phi(x) \cup \Phi(y)$. Supposons que $m \in \Phi(x)$. Alors

$$m(x + y + xy) = mx + my + mxy = m + my + my.$$

Comme $\forall \gamma \in A, \gamma + \gamma = 0$ alors $m(x + y + xy) = m$ et donc $m \in \Phi(x + y + xy)$.
On procède de même dans le cas où $m \in \Phi(y)$.
Réciproquement, supposons que $m \in \Phi(x + y + xy)$, soit $mx + my + mxy = m$. Puisque $m \in E$, nous savons que my et mx sont dans $\{0, m\}$.
Si $mx = my = 0$ alors la relation $mx + my + mxy = m$ implique que $m = 0$, ce qui est absurde par définition de E.
Ainsi, au moins l'un des éléments $\{mx, my\}$ est égal à m, c'est-à-dire que $m \in \Phi(x)$ ou $m \in \Phi(y)$, soit $m \in \Phi(x) \cup \Phi(y)$.
Ainsi nous avons obtenu, par double inclusion, l'égalité recherchée.

(c) Soit $m \in \Phi(1 + x)$. Nous avons alors $m(1 + x) = m$, soit $m + mx = m$ et donc $mx = 0$. Ainsi, $m \notin \Phi(x)$ et donc $m \in \overline{\Phi(x)}$. Nous avons donc l'inclusion $\Phi(1 + x) \subset \overline{\Phi(x)}$.
Réciproquement, soit $m \in \overline{\Phi(x)}$, c'est-à-dire que $mx \neq m$. Or, $m \in E$ donc $mx = 0$, ce qui implique que $m + mx = m$, soit encore $m \in \Phi(1 + x)$. Nous avons alors l'inclusion $\Phi(1 + x) \subset \Phi(x)$. En définitive, nous avons démontré l'égalité $\Phi(1 + x) = \overline{\Phi(x)}$.

(d) Par définition, on a :

$$\Phi(x)\Delta\Phi(y) = \left(\Phi(x) \cap \overline{\Phi(y)}\right) \cup \left(\Phi(y) \cap \overline{\Phi(x)}\right).$$

En utilisant les précédents résultats, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\Phi(x)\Delta\Phi(y) &= (\Phi(x) \cap \Phi(1+y)) \cup (\Phi(y) \cap \Phi(1+x)) \quad \text{car } \Phi(x) = \Phi(1+x) \text{ et } \Phi(y) = \Phi(1+y) \\
&= \Phi(x(1+y)) \cup \Phi(y(1+x)) \quad \text{car } \Phi(x) \cap \Phi(y) = \Phi(xy) \\
&= \Phi(x(1+y) + y(1+x) + xy(1+x)(1+y) \quad \text{car } \Phi(x) \cup \Phi(y) = \Phi(x+y+xy) \\
&= \Phi(x + xy + y + yx + xy(1 + x + y + xy)) \\
&= \Phi(x + y + (xy + xy) + xy + xy + xy + xy) \quad \text{car } x^2 = x \text{ et } y^2 = y \\
&= \Phi(x+y) \quad \text{car } xy + xy = 0
\end{aligned}$$

Nous obtenons bien l'égalité recherchée.

(e) Nous avons $\Phi(1) = E$, car pour tout m de E, $m.1 = m$. De plus, $\forall (x, y) \in B^2$, nous avons $\Phi(x + y) = \Phi(x)\Delta\Phi(y)$ et $\Phi(xy) = \Phi(x) \cap \Phi(y)$. Aussi Φ est-il un morphisme d'anneau de $(B, +, .)$ dans $(\mathscr{P}(E), \Delta, \cap)$.

3. (a) Soit $x_0 \in B$ non nul. Par définition de E, nous avons :

$$x_0 \in E \Leftrightarrow \forall x_1 \in B,\ x_0x_1 \in \{0, x_0\}.$$

d'où l'on tire :

$$x_0 \notin E \Leftrightarrow \exists x_1 \in B,\ x_0x_1 \notin \{0, x_0\}.$$

Si x_1 vérifie $x_0x_1 \in E$ alors $y = x_1$. Sinon, $x_0x_1 \notin E$, et il existe donc $x_2 \in B$ tel que $x_0x_1x_2 \neq 0$ et $x_0x_1x_2 \neq x_0x_1$. De plus, $x_0x_1x_2 \neq x_0$ car dans le cas contraire, en multipliant par x_1 nous obtiendrons $x_0x_1x_2 = x_0x_1$ ce qui serait contradictoire.
S'il n'existe aucun élément $y \in B$ tel que $x_0y \in E$, nous pourrions alors construire une suite infinie d'éléments $(x_0, x_0x_1, x_0x_1x_2, \dots)$ d'éléments de B deux à deux distincts, ce qui contredit le fait que B est fini. Ainsi, il existe $y \in B$ tel que $x_0y \in E$.

(b) Soit $x \in \ker(\Phi)$, c'est-à-dire $\Phi(x) = \varnothing$, soit encore $\forall m \in E, mx = 0$.
Si $x \neq 0$, la question précédente implique l'existence d'un élément $y \in B$ tel que $xy \in E$, et donc $xyx = 0$, soit $xy = 0$ ce qui contredit la définition de E. Ainsi, $\ker(\Phi) = \{0\}$ et le morphisme Φ est injectif.

(c) Soit $F = \{ m_1, m_2, \dots, m_n \}$. Si $m \in \Phi(S_F)$, alors $m(m_1 + m_2 + \dots + m_n) = m$.
Si $m \notin F$ alors pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $mm_i = 0$ et donc $mS_F = 0$ et $m \notin \Phi(S(F))$, ce qui est absurde. Ainsi, $m \in F$ et $\Phi(S_F) \subset F$.
Réciproquement, si $m \in F$, alors il existe $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ tel que $m = m_j$. Ainsi, $mS_F = m_j = m$ et donc $F \subset \Phi(S_F)$.
Ainsi, nous avons démontré que $\forall F \subset E$, $\Phi(S_F) = F$: le morphisme Φ est surjectif.

(d) Nous savons donc que tout anneau de Boole fini B est isomorphe à un anneau de la forme $(\mathscr{P}(E), \Delta, \cap)$. Or, le cardinal de $\mathscr{P}(E)$ est une puissance de 2, d'où le cardinal de tout anneau de Boole est une puissance de 2.

Problème II

Préliminaire

1. Puisque $a \notin H$, on constate immédiatement que : $E = H \oplus \mathbb{R}a$. $u(a) \in E$, donc $u(a)$ se décompose de façon unique suivant la somme directe précédente et il existe un couple unique $(\gamma, h_a) \in \mathbb{R} \times H$, tel que : $u(a) = \gamma a + h_a$.

2. Soit $b \notin H$, un autre vecteur non nul. On peut alors écrire : $u(b) = \gamma' b + h_b$. Montrons que $\gamma' = \gamma$. Mais b se décompose sous la forme $b = \alpha.a + h$, où $\alpha \in \mathbb{R}$, $h \in H$. Avec de plus $\alpha \neq 0$ puisque $b \notin H$, on a donc :

$$\begin{aligned} u(b) &= \alpha u(a) + u(h) \\ &= \alpha u(a) + h \quad \text{car } h \text{ est invariant par } u \\ &= \alpha(\gamma a + h_a) + h \\ &= \gamma(b - h) + \alpha h_a + h \\ &= \gamma b + (\alpha h_a + h - \gamma h) \end{aligned}$$

On a donc une décomposition de type $u(b) = \gamma b + h'$ avec $\gamma \in \mathbb{R}$ et $h' \in H$. Par unicité de la décomposition on a nécessairement $\gamma' = \gamma$.

Partie I

1. (a) Cherchons un vecteur $b \notin H$ tel que $u(b) = \gamma b$. D'après ce qui précède $u(b) = \gamma b + (\alpha h_a + h - \gamma h)$, donc on doit chercher b tel que $\alpha h_a + h - \gamma h = 0$, donc $h = \dfrac{\alpha h_a}{\gamma - 1}$ (c'est possible puisque $\gamma \neq 1$). Donc le vecteur a_1 est de la forme $a_1 = \alpha\left(a + \dfrac{1}{\gamma - 1} h_a\right)$. On peut prendre, par exemple, $\alpha = 1$. Le vecteur choisi n'appartient pa à H puisque $u(e_1) = \gamma e_1 \neq e_1$.

(b) Puisque $a_1 \notin H$, alors $E = \mathbb{R}a_1 \oplus H$. Donc $\{a_1\} \cup \{h_2, h_3, \dots, h_d\}$ est une base de E. Les vecteurs de H sont invariants par u, donc $u(h_i) = h_i$ pour tout $i \in [\![2, d]\!]$ et comme $u(a_1) = \gamma a_1$, alors la matrice de u dans cette base est diagonale :

$$\begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Soit $x = x_1a_1 + h_x$ où $x_1 \in \mathbb{R}$ et $h_x \in H$. Donc :

$$\begin{aligned} u(x) = \gamma x &\Leftrightarrow x_1u(a_1) + h_x = \gamma x_1 a_1 + \gamma h_x \\ &\Leftrightarrow x_1\gamma a_1 + h_x = \gamma x_1 a_1 + \gamma h_x \\ &\Leftrightarrow (1-\gamma)h_x = 0 \end{aligned}$$

et comme $\gamma \neq 1$, alors $h_x = 0$.
D'où

$$u(x) = \gamma x \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}a_1.$$

2. Soit $D = \mathbb{R}e$ une droite vectorielle ($e \neq 0$) telle que $u(D) \subset D$. Alors $u(e)$ appartient à D et il existe λ tel que $u(e) = \lambda e$. Si on pose $e = x_1a_1 + \sum_{i=2}^{d} x_ih_i$, la condition $u(e) = \lambda e$ implique $(\gamma - \lambda)x_1a_1 + \sum_{i=2}^{d}(1-\lambda)x_ih_i = 0$, donc $(\gamma - \lambda)x_1 = 0$ et $i \in [\![2, d]\!]$, $(1-\lambda)x_i = 0$.

- Si $\lambda \notin \{1, \gamma\}$, on obtient $x_1 = 0$ et $i \in [\![2, d]\!]$, $x_i = 0$, donc $e = 0$ ce qui est absurde puisque $\mathbb{R}e$ est une droite.
- Si $\lambda = 1$ on a $x_1 = 0$, donc $e \in H$ et $D \subset H$.
- Si $\lambda = \gamma$ on obtient $\forall i \in [\![2, d]\!]$, $x_i = 0$, donc $e \in \mathbb{R}a_1$ et $D = \mathbb{R}a = E_\gamma$.

Réciproquement, si $D = E_\gamma$, ou si $D \subset H$, alors on a bien $u(D) \subset D$. En conclusion, les droites stables sont incluses dans H ou c'est E_γ.

3. (a) Supposons $V \subset H$. Alors il est clair que $\forall x \in V$, $u(x) = x$ (tous les vecteurs de V sont invariants par u), et $u(V) = V$.
Supposons maintenant V n'est pas inclus dans H mais contient E_γ. Soit $v \in V$ on doit montrer que $u(v) \in V$. On pose $v = \beta a_1 + h$ ($\beta \in \mathbb{R}$, $h \in H$). On a alors $u(v) = \gamma\beta a_1 + h = v + (\gamma - 1)\beta a_1$. Or $v \in V$ et $a_1 \in V$ (car $E_\gamma \subset V$), donc $u(v) \in V$.

(b) i. Notons v une base de D. Alors $v = \alpha a_1 + h$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $h \in H$. Puis $u(v) = \alpha\gamma a_1 + h = (\alpha a_1 + h) + \alpha(\gamma - 1)a_1 = v + \alpha(\gamma - 1)a_1 \in D + E_\gamma$ donc $u(v) \in F$. Donc, en utilisant la linéarité de u, on a $u(D) \subset D$, et comme $u(E_\gamma) \subset E_\gamma$, on a bien $u(F) \subset F$.

ii. Supposons $u(V) \subset V$. On a alors pour $v \in V \setminus H$ ($V \nsubseteq H$) $u(v) \in V$. Or $v \in F = \text{Vect}(a_1, v)$ donc $u(v) \in F$. Donc il existe des réels α et β tels que $u(v) = \alpha a_1 + \beta v$.

- Si $\alpha = 0$, on a $u(v) = \beta v$ donc $D = \mathbb{R}v$ est une droite stable. Absurde d'après les hypothèses et on sait que $D \neq E_\gamma$ puisque $E_\gamma \nsubseteq V$.
- Si $\alpha \neq 0$, on a $a_1 = \dfrac{u(v) - \beta v}{\alpha} \in V$, ce qui est absurde car $E_\gamma \nsubseteq V$.

En conclusion, on a bien $u(V) \nsubseteq V$.

(c) Grâce aux questions précédentes (i. et ii.), on conclut immédiatement que :

$$u(V) \subset V \Leftrightarrow V \subset H \text{ ou } E_\gamma \subset V.$$

Partie II

1. H est un hyperplan de E, donc il existe une forme linéaire f sur E dont le noyau est H.

2. Existence : On a $u(a) = a + h_a$ d'après la partie préliminaire avec $\gamma = 1$. Posons alors $c = \dfrac{h_a}{f(a)} \in H$. Ce qui a un sens car $a \notin H \Rightarrow f(a) \neq 0$. On a donc $u(a) = a + f(a)c$.
Montrons alors $\forall x \in E$, $u(x) = x + f(x)c$. En effet, on décompose x sous la forme $x = ka + h$. On a donc $f(x) = kf(a)$ et

$$u(x) = k(a + f(a)c) + h = x + kf(a)c = x + f(x)c.$$

Unicité : Supposons qu'il existe $d \in E$ tel que $\forall x \in E, u(x) = x + f(x)c = x + f(x)d$ alors $\forall x \in E, f(x)(c - d) = 0$. Or il existe des vecteurs tels que $f(x) \neq 0$. Donc $c = d$. En conclusion, il existe un vecteur $c \in H$ unique tel que $u(x) = x + f(x)c$.

3. Il suffit de montrer que pour tout $y \in$, l'équation $y = x + f(x)c$ admet une solution unique. En effet, on a

$$f(y) = f(x) + fx)f(c) = f(x)$$

car $c \in H$. Donc $x = y - f(x)x = y - f(y)c$. On vérifie alors que si $\forall x \in E, g(x) = x - f(x)c$ on a $g \circ f = f \circ g = \mathrm{Id}_E$. Donc $g : x \mapsto x - f(x)c$ est la fonction réciproque de f.

4. (a) Soit λ un réel et x un vecteur tel que $u(x) = \lambda x$ Alors $(\lambda - 1)x = f(x)c$.
Supposons : $\lambda \neq 1$. Alors x est colinéaire à c et appartient donc à H, donc $f(x) = 0$ et $x = 0$.
Si d'autre part $\lambda = 1$, alors on doit résoudre $u(x) = x$, donc $f(x)c = 0$. Or u n'étant pas l'identité, c est non nul et cela entraîne $f(x) = 0$, donc $x \in H$. Donc la seule valeur λ qui convienne est 1 et l'ensemble des vecteurs correspondants est H.

(b) Construisons une base $\mathscr{B}'$ de E : $e'_1 = a$ ($a \notin H$), $e'_2 = c$ ($c \in H$), $e'_3, \dots, e'_d$ (des vecteurs de H complétant en une base de E). La matrice de u dans cette base $\mathscr{B}'$ est alors :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Car $u(e'_1) = u(a) = a + c = e'_1 + e'_2$ et $\forall i \in [\![2, d]\!], u(e'_i) = e'_i$.

(c) Il est déjà évident que si $V \subset H$, V est stable par u. On a aussi que si $c \in V$ alors V est stable par u : $x \in V \Rightarrow u(x) = x + f(x)c \in V$.
Montrons alors :

$$V \text{ est stable par } u \text{ si et seulement si } V \subset H \text{ ou } c \in V.$$

On a déjà montré une implication.
Réciproquement, soit V stable par u :

- si $V \subset H$ le résultat est évident.
- sinon il existe $v \in V \setminus H$ on a alors $u(v) = v + f(v)c \in V$ donc $c = \dfrac{u(v) - v}{f(v)} \in V$. En effet $f(v) \neq 0$ car $v \notin H$.

●●●●●●●●●●●