Devoir surveillé $n^\circ 02$
Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

•••••••••••

Exercice 1 :

1. $K = \left\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; x^4 + \left(\dfrac{x-y}{2}\right)^2 \leq 4,\ y - x \leq 2 \text{ et } y \geq 0 \right\}$.

2. (a) K est non vide car $(0,0) \in K$. Soit $(x,y) \in K$. Alors, $x^4 \leq 4 \Rightarrow |x| \leq \sqrt{2}$. Or, $y \geq 0$ et $y \leq x + 2 \leq 2 + \sqrt{2}$. On en déduit que K est un borné de $\mathbf{R}^2$.

(b) Montrons maintenant que K est fermé. On a :

$$K = \left\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid \varphi_1(x,y) \leq 0,\ \varphi_2(x,y) \leq 0 \right\} \cap [0,+\infty[$$

où φ_1 et φ_2 sont des fonctions définies sur $\mathbf{R}^2$ et à valeurs réelles telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ \varphi_1(x,y) = x^4 + \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 - 4 \ \text{ et } \varphi_2(x,y) = y - x - 2.$$

Or, φ_1 et φ_2 sont des fonctions polynômes donc continues sur $\mathbf{R}^2$ et $[0,+\infty[$ est fermé. Or, l'image réciproque d'un fermé par une application continue est un fermé et une intersection de fermés est fermée. On en déduit que K est un fermé.

Finalement, K est fermé et borné dans $\mathbf{R}^2$ (de dimension finie) donc K est compact. Donc l'application f qui est continue sur $\mathbf{R}^2$ (polynomiale) est bornée et atteint ses bornes sur K, en particulier il existe $(a,b) \in K$ tel que

Puisque l'image d'un compact par une application continue est un compact et que f est clairement

$$f(a,b) = \min_{(x,y) \in K} f(x,y).$$

Exercice 2 :

1. Si f est continue sur $[0,2]$, il est de même pour $|f|$ l'est aussi. Donc $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^2 |f(t)| \mathrm{d}t$ existe. De même, l'image d'un segment par une fonction continue est un segment donc $\{ f(t) \mid t \in [0,2] \}$ est borné. On en déduit l'existence de $\|f\|_\infty$ qui est en fait un maximum.

On rappelle que l'intégrale d'une fonction continue positive est nulle si, et seulement si, il s'agit de la fonction nulle. On rappelle d'autre part que si f est continue, alors $|f|$ est continue. On a donc démontré $\|f\|_1 = 0 \Leftrightarrow f = 0$. D'autre part, pour tout $t \in [0,2]$, l'inégalité triangulaire de la valeur absolue donne :

$$|f(t) + g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)|.$$

Une intégration de cette inégalité entre 0 et 2 donne l'inégalité triangulaire pour $\|.\|_1$. Enfin, la linéarité de l'intégrale donne, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$,

$$\int_0^2 |\lambda f(t)| \mathrm{d}t = |\lambda| \int_0^2 |f(t)| \mathrm{d}t.$$

2. Soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de Cauchy d'éléments de $\mathscr{C}([0,2],\mathbf{R})$ pour la norme $\|.\|_\infty$. Alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbf{N} : p > q \geq n_0 \Rightarrow \|f_p - f_q\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Par conséquent, il est immédiat que

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in [0,2]\ \exists n_0 \in \mathbf{N} : p > q \geq n_0 \Rightarrow |f_p(x) - f_q(x)| \leq \epsilon \tag{1}$$

Par conséquent, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbf{R}$ qui est complet, donc elle converge. On note donc $f(x)$ sa limite, ce qui définit une application f de $[0,2]$ dans $\mathbf{R}$.
• Montrons que $f \in \mathscr{C}([0,2],\mathbf{R})$. On se fixe $x_0 \in [0,2]$ et $\varepsilon > 0$. On sait, en particulier que si x est fixé, on a :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

donc, il existe un rang $n_1 \in \mathbf{N}$ tel que :

$$n \geq n_1 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{et} \quad n \geq n_1 \Rightarrow |f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

De plus, les applications éléments de $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ étant continues, en particulier, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$|x - x_0| \leq \alpha \Rightarrow |f_{n_1}(x) - f_{n_1}(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

On peut alors écrire par inégalité triangulaire :

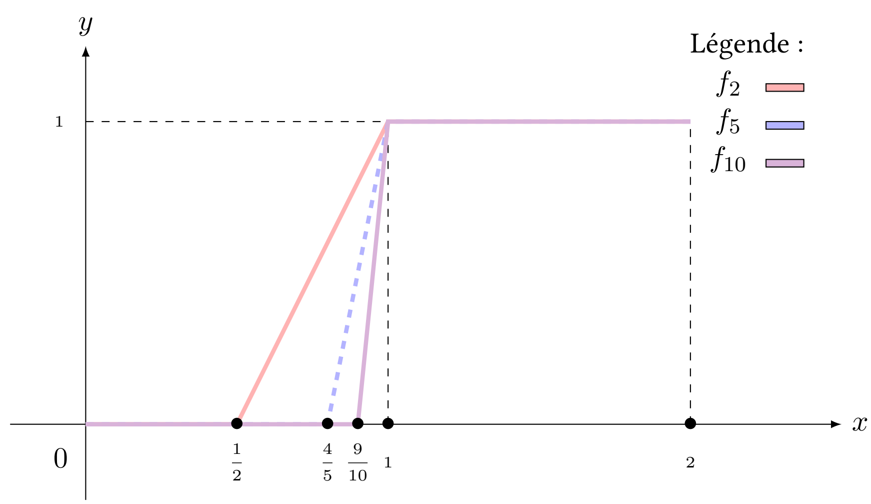
$$\forall x \in [0,2] : |x - x_0| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_{n_1}(x)| + |f_{n_1}(x) - f_{n_1}(x_0)| + |f_{n_1}(x_0) - f(x_0)| \leq 3\frac{\varepsilon}{3}.$$

Cela démontre que $f \in \mathscr{C}([0,2],\mathbf{R})$.
• Reste à démontrer que f est bien limite uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$. En effet, on peut faire tendre p vers $+\infty$ dans l'inégalité (1), ce qui garantit que

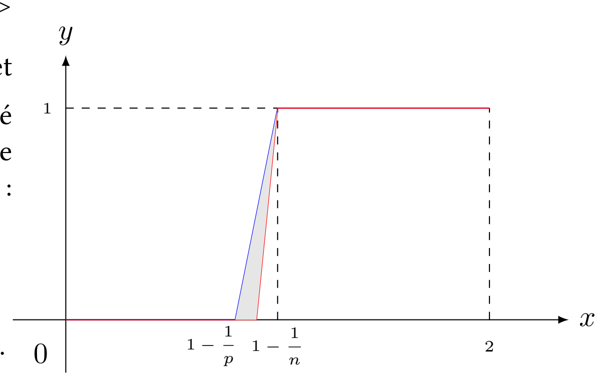
$$\forall q \in \mathbf{N} : q > n_0 \Rightarrow \|f - f_q\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Cela démontre que $\mathscr{C}([0,2],\mathbf{R})$ muni de le norme de la convergence uniforme est complet.

3. (a)



(b) Soient n et p, deux entiers tels que $n > p$. On a donc $1 - \frac{1}{n} > 1 - \frac{1}{p}$. Ainsi, pour tout x de $[0,2]$, $f_n(x) \leq f_p(x)$ et $\mathscr{C}_{f_n}$ et $\mathscr{C}_{f_p}$ leur courbe représentative dans le repère orthonormé (O,I,J). L'aire de la partie du plan limitée par les courbe $\mathscr{C}_{f_n}$ et $\mathscr{C}_{f_p}$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$ vaut : $\displaystyle\int_0^2 (f_n(x) - f_p(x))\mathrm{d}x = \|f_n - f_p\|_1$, d'où :



$$\|f_n - f_p\|_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}\times 1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\times 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n}\right).$$

(c) Comme précédemment, $\|f_n - f^*\|_1$ est l'aire de la partie du plan limitée par les courbe $\mathscr{C}_{f_n}$ et $\mathscr{C}_{f^*}$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$, d'où :

$$\|f_n - f^*\|_1 = \frac{1}{2}\times\frac{1}{n}\times 1 = \frac{1}{2n}.$$

(d) D'après les questions précédentes, on déduit que :
- $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy pour la norme $\|.\|_1$, car $\|f_n - f_p\|_1$ tend vers 0 quand n et p tendent vers $+\infty$
- $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge au sens de la norme $\|.\|_1$ vers la fonction f^* ;
- $(\mathscr{C}([0,2],\mathbf{R}), \|.\|_1)$ n'est pas complet car f^* n'appartient pas à $\mathscr{C}([0,2],\mathbf{R})$.

Problème :

Partie I

1. (a) Soit λ une valeur propre de f_A. Montrons que $E_\lambda(A)$ est stable par f_B. Soit $x \in E_\lambda(A)$. Alors

$$(f_A - \lambda id_E)(f_B(x)) = f_A \circ f_B(x) - \lambda f_B(x) = f_B \circ f_A(x) - \lambda f_B(x) = f_B\left((f - \lambda \mathbf{Id}_E)\right)(x) = f_B(0) = 0.$$

Donc $f_B(x) \in E_\lambda(A)$.

(b) Considérons l'application g_λ de $E_\lambda(A)$ dans $E_\lambda(A)$ qui, à $x \in E_\lambda$, associe $f_B(x)$. C'est un endomorphisme sur un $\mathbf{C}$-espace vectoriel, donc il admet une valeur propre μ et il existe $x \neq 0 \in E_\lambda(A)$ tel que $g_\lambda(x) = f_B(x) = \mu x$. Or $x \in E_\lambda(A)$ donc $f_A(x) = \lambda x$. On a ainsi montré que f_A et g_A ont un vecteur propre commun.

(c) Notons $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les différentes valeurs propres de f_A, alors d'après ce qui précède, pour tout $1 \leq i \leq 3$, il existe un vecteur propre commun $v_i \neq 0$ à f_A et f_B (les $E_{\lambda_i}(A)$ sont des droites), donc il il existe des scalaires μ_1, μ_2, μ_3 tels que $f_B(v_i) = \mu_i v_i$ pour $1 \leq i \leq 3$. Donc les matrices de f_A et f_B dans la base (v_1, v_2, v_3) sont diagonales.
L'hypothèse que les valeurs propres de f_A sont différentes, est essentielle. En effet, la matrice identité commute avec toutes les matrices, y compris les non diagonalisables.

2. (a) • On peut vérifier facilement que les trois applications φ, ψ et u sont des endomorphismes de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$. De plus si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$,

$$\varphi \circ \psi(M) = \varphi(\psi(M)) = \varphi(MB) = AMB = \psi(AM) = \psi(\varphi(M)) = \psi \circ \varphi(M).$$

D'où $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$.
• Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(\varphi)$. Il existe $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$, non nul tel que $\varphi(M) = \lambda M$. M étant non nul, il existe $X_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ tel que $MX_0 \neq 0$. Alors $(\varphi(M))(X_0) = AM(X_0) = \lambda M(X_0)$ et λ est valeur propre de φ. Ainsi, $\mathrm{Sp}(\varphi) \subset \mathrm{Sp}(A)$.
Réciproquement, soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. Il existe $X \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbf{C})$, non nul, tel que $AM = \lambda M$. Soit p un projecteur sur la droite $\mathrm{Vect}(M)$ parallèlement à un hyperplan supplémentaire H. Alors, $\forall N \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{C})$, $p(N) \in \mathrm{Vect}(M)$, donc $\varphi(p(M)) = \lambda p(N)$. Ainsi, $\varphi(p) = \varphi \circ p = \lambda p$ et λ est valeur propre de φ. Donc, $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathrm{Sp}(\varphi)$ et finalement, $\mathrm{Sp}(\varphi) = \mathrm{Sp}(A)$.
• Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(\psi)$ et $E_\lambda(\psi)$ le sous espace propre associé. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$, non nul.

$$\begin{aligned} M \in E_\lambda(\psi) &\Leftrightarrow \psi(M) = \lambda M \\ &\Leftrightarrow MB = \lambda M \\ &\Leftrightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{C}),\ \ MBX = \lambda MX \\ &\Leftrightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{C}),\ \ M(BX - \lambda X) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{C}),\ \ BX - \lambda X \in \ker M \\ &\Leftrightarrow \mathbf{Im}(B - \lambda \mathbf{I}_n) \subset \ker M \end{aligned}$$

M n'étant pas nul, $\ker M \neq \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{C})$. $\ker M$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{C})$, de dimension inférieure ou égal à $n-1$.
L'inclusion $\mathbf{Im}(B - \lambda \mathbf{I}_n) \subset \ker M$ implique que l'endomorphisme $f_B - \lambda \mathbf{Id}_E$ n'est pas injectif, c'est à dire que λ est valeur propre de f_B.
Réciproquement, si λ est valeur propre de B, $\mathbf{Im}(f_B - \lambda \mathbf{Id}_E)$ est un sous espace de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ strictement inclus dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ et il existe une matrice M de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{C})$, nul sur $\mathbf{Im}(B - \lambda \mathbf{I}_n)$ et non identiquement nul (il suffit de le définir comme étant non nul sur un sous-espace supplémentaire de $\mathbf{Im}(B - \lambda \mathbf{I}_n)$). Une telle matrice M vérifie $\mathbf{Im}(B - \lambda \mathbf{Id}_E) \subset \ker M$, donc $\forall M \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{C})$, $M(BX - \lambda X) = 0$ et finalement $\psi(M) = MB = \lambda M$. Donc λ est valeur propre de ψ. Ainsi, $\mathrm{Sp}(\psi) = \mathrm{Sp}(B)$.

Remarque : On peur remarquer que $\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C}), \forall \lambda \in \mathbf{C}, \psi(M) = MB$ si et seulement si, ${}^tB{}^tM = \lambda{}^tM$, d'où $\mathrm{Sp}(\psi) = \mathrm{Sp}({}^tB) = \mathrm{Sp}(B)$.

(b) X est une matrice colonne non nulle, ${}^tY$ est une matrice ligne non nulle. Leur produit $M = X{}^tY$ est donc une matrice carrée non nulle, et

$$AM = AX{}^tY = (AX){}^tY = \lambda X{}^tY$$

et

$$MB = X{}^tYB = X({}^tYB) = X\mu{}^tY = \mu X{}^tY.$$

On a donc trouvé une matrice $M = X{}^tY$ non nulle telle que $u(M) = AM - MB = (\lambda - \mu)X{}^tY$, et par conséquent $X{}^tY$ est un vecteur propre de u associé à $\lambda - \mu$.

(c) i. Soit $\beta \in \mathrm{Sp}(u)$ et $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ un vecteur propre associé. Par $u(M) = \beta M$, on a $AM - MB = \beta M$, donc $AM = M(\beta\mathbf{I}_n + B)$. Soit $k \in \mathbf{N}$, supposons $A^kM = M(\beta\mathbf{I}_n + B)^k$ et montrons que $A^{k+1}M = M(\beta I_n + B)^{k+1}$. Donc $A^{k+1}M = AA^kM = AM(\beta\mathbf{I}_n + B)^k = M(\beta\mathbf{I}_n + B)^{k+1}$.

ii. On a $A^kM = M(\beta\mathbf{I}_n + B)^k$ pour tout entier naturel k et par combinaison linéaire, on obtient $P(A)M = MP(\beta\mathbf{I}_n + B)$ pour tout polynôme P de $\mathbf{C}[X]$.

iii. D'aprés le théorème de *Cayley-Hamilton*, $\chi_A(A) = 0$ donc $M\chi_A(\beta\mathbf{I}_n + B) = 0$. Comme M est une matrice non nulle, il en résulte que $\chi_A(\beta\mathbf{I}_n + B))$ est non inversible.
Or $\chi_A(\beta\mathbf{I}_n + B) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} ((\beta - \lambda)\mathbf{I}_n + B)^{\alpha_\lambda}$ n'est pas inversible implique qu'il existe $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ tel que $((\beta - \lambda)\mathbf{I}_n + B)^{\alpha_\lambda}$ n'est pas inversible et donc il existe $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ tel que $(\beta - \lambda)\mathbf{I}_n + B$ n'est pas inversible. Donc $\lambda - \beta \in \mathrm{Sp}\, B$ et par conséquent il existe $\mu \in \mathrm{Sp}(B)$ tel que $\lambda - \beta = \mu$ ou encore $\beta = \lambda - \mu$.

(d) D'après l'étude précédente, $\mathrm{Sp}\,(u) \subset \mathrm{Sp}\,(A) + \mathrm{Sp}\,(B)$.
Inversement, d'aprés la question 2.b on voit que $\mathrm{Sp}\,(u) \supset \mathrm{Sp}\,(A) - \mathrm{Sp}\,(B)$. D'où l'égalité :

$$\mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Sp}(A) - \mathrm{Sp}(B).$$

D'autre part, on sait que u est inversible si, et seulement si, $0 \notin \mathrm{Sp}(u)$. Ainsi $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \varnothing \Leftrightarrow 0 \notin \mathrm{Sp}(u) \Leftrightarrow u$ est inversible.

(e) i. On trouve $\mathrm{Sp}(A) = \{-2, 3, 6\}$ et $\mathrm{Sp}(B) = \{0, 2, 3\}$. D'où :

$$\mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Sp}(A) - \mathrm{Sp}(B) = \{-2, -4, -5, 0, 1, 3, 4, 6\}.$$

En particulier, $\chi_u(X) = (X+2)(X+4)(X+5)X(X-1)(X-4)(X-6)(X-3)^2$.

ii. On remarque $E = \ker(u) = E_0(u)$ est une droite vectorielle (0 est d'ordre de multiplicité 1). D'après 2.b, si X est un vecteur propre de A associé à 3 et Y est un vecteur propre de B associé à 3, $X{}^tY$ est un vecteur propre de u associé à 0. Les calculs montre que $E_3(A) = \mathrm{Vect}(X)$ où ${}^tX = (1, -1, 1)$ et $E_3(B) = \mathrm{Vect}(Y)$ où ${}^tY = (1, 1, 1)$, d'où :

$$E = \mathrm{Vect}(M)$$

où $M = X{}^tY = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Toutes les matrices de E sont de rang 1, à l'exception de la matrice nulle, donc E ne contient pas des matrices inversibles.

iii. On a $AM = MB + 3M \Leftrightarrow u(M) = 3M$, donc l'ensemble de solutions de l'équation $AM = MB + 3M$ est $E_3(u)$. La valeur propre 3 de u est obtenue pour $\lambda \in \{3, 6\}$ et $\mu \in \{0, 3\}$. Or $E_3(A) = \mathrm{Vect}(X_1)$ où ${}^tX_1 = (1, -1, 1)$, $E_6(A) = \mathrm{Vect}(X_2)$ où ${}^tX_2 = (1, 2, 1)$, $E_0(B) = \mathrm{Vect}(Y_1)$ où ${}^tY_1 = (1, -2, 1)$ et $E_3(B) = \mathrm{Vect}(Y_2)$ où ${}^tY_2 = (1, 1, 1)$, donc $\mathrm{Vect}(X_1{}^tY_1, X_2{}^tY_2) \subset E_3(u)$. D'après les calculs

$$X_1{}^tY_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } X_2{}^tY_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ces deux matrices sont libres, donc l'ensemble de solutions de l'équation matricielle $AM = MB + 3M$ est $E_3(u) = \mathrm{Vect}(X_1{}^tY_1, X_2{}^tY_2)$.

iv. Le polynôme caractéristique de u est scindé (on ait dans $\mathbf{C}$) toutes les racines sont simples, sauf 3 qui est une racine double et comme $\dim E_3(u) = 2$, alors u est diagonalisable.

3. La famille $(X_i^t Y_j)_{1\leq i,j\leq n}$ est formée par des vecteurs propres de u, pour montrer que l'endomorphisme u est diagonalisable il suffit de montrer que c'est une base de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$. Or elle est de cardinal n^2 égal à la dimension de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$, il suffit donc de montrer qu'elle est libre.

En effet, $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij} X_i^t Y_j = 0$ implique $\displaystyle\sum_{i=1}^n X_i^t Z_i = 0$ où $Z_i = \displaystyle\sum_{j=1}^n a_{ij} Y_j$, on multiplie cette égalité à droite par un Z_j où $1 \leq j \leq n$ fixe, mais quelconque, d'où $\displaystyle\sum_{i=1}^p a_i X_i = 0$ où $a_i = {}^t Z_i Z_j$, or $(X_1, \ldots, X_n)$ une famille libre de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ donc les a_i sont tous nuls en particulier $a_j = {}^t Z_j Z_j = \|Z_j\|_2^2 = 0$ et donc $Z_j = 0$ pour tout $1 \leq j \leq n$. Mais $Z_i = \displaystyle\sum_{j=1}^n a_{ij} Y_j$ pour tout $1 \leq i \leq n$ or $(Y_j)_{1\leq j\leq n})$ est aussi libre, donc $a_{ij} = 0$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$.

4. Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbf{C})$. Si $M^2 = A$ alors $AM = M^3 = MA$ et donc M et A commutent. A admet trois valeurs propres réelles et simples à savoir -2, 3 et 6. Donc A est diagonalisable dans $\mathbf{R}$ et les sous-espaces propres de A sont des droites. M commute avec A et donc laisse stable les trois droites propres de A.
Ainsi, il existe une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ formée de vecteurs propres de A est également une base de vecteurs propres de M ou encore, si P est une matrice réelle inversible telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale D_0 alors pour la même matrice P, $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale D. De plus

$$M^2 = A \Leftrightarrow PD^2P^{-1} = PD_0P^{-1} \Leftrightarrow D^2 = D_0 \Leftrightarrow D = \begin{pmatrix} \pm i\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \mp\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \pm\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Ce qui fournit huit solutions de l'équation matricielle $M^2 = A$.

Partie II

1. Pour tout nombre complexe λ, on a :

$$\begin{array}{rcl}
\chi_A(\lambda) & = & \begin{vmatrix} \lambda - 12 + 2i & 6 + 2i & -6 - 2i \\ 6 + 2i & \lambda - 3 + 5i & 3 + i \\ -6 - 2i & 3 + i & \lambda - 3 + 5i \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 + C_2 - C_3 \\
& = & \begin{vmatrix} \lambda + 6i & 6 + 2i & -6 - 2i \\ \lambda + 6i & \lambda - 3 + 5i & 3 + i \\ -\lambda - 6i & 3 + i & -3 + 5i \end{vmatrix} \quad L_2 \leftarrow L2 - L_1 \text{ et } L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\
& = & (\lambda + 6i) \begin{vmatrix} 1 & 6 + 2i & -6 - 2i \\ 1 & \lambda - 3 + 5i & 3 + i \\ -1 & 3 + i & -3 + 5i \end{vmatrix} \\
& = & (\lambda + 6i) \begin{vmatrix} 1 & 6 + 2i & -6 - 2i \\ 0 & \lambda - 9 + 3i & 9 + 3i \\ 0 & 9 + 3i & \lambda - 9 + 3i \end{vmatrix} \\
& = & (\lambda + 6i) \left[(\lambda - 9 + 3i)^2 - (9 + 3i)^2\right] \\
& = & (\lambda + 6i)^2(\lambda - 18)
\end{array}$$

D'où $\mathrm{Sp}(A) = \{-6i, 18\}$.
Cherchons le sous-espace propre associé à la valeur propre $-6i$. On doit résoudre $AX = -6iX$ et on trouve fois le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl}
(12 - 2i)x - (6 + 2i)y + (6 + 2i)z & = & -6ix \\
-(6 + 2i)x + (3 - 5i)y - (3 + i)z & = & -6iy \\
(6 + 2i)x - (3 + i)y + (3 - 5i)z & = & -6iz
\end{array}\right.$$

qui est équivalent à $2x - y + z = 0$. Donc $E_{-6i}(A)$ est l'hyperplan d'équation $2x - y + z = 0$, on obtient $E_{-6i}(A) = \mathrm{Vect}(V_1, V_2)$ où ${}^tV_1 = (-1, 0, 2)$ et ${}^tV_2 = (1, 2, 0)$.

Pour la valeur propre 18, on résout l'équation $AX = 18X$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On trouve le système qui s'écrit encore

$$\begin{cases} x = -2y \\ z = -y \end{cases}$$

Ainsi, le sous-espace propre associé à la valeur propre 18 est le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur ${}^tV_3 = (2, -1, 1)$.

2. En développant par rapport à la première ligne, on obtient $\det P = 6(bd - ac)$. Ainsi, P est inversible si, et seulement si, $bd \neq ac$.
On remarque que les deux premiers vecteurs colonnes C_1 et C_2 de P sont des vecteurs de l'hyperplan $2x - y + z$ définissant le sous-espace propre $E_{-6i}(A)$, le troisième colonne C_3 est un vecteur propre associé à 18. Donc P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbf{C}^3$ à la base de vecteurs propre de A, d'où :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -6i & 0 & 0 \\ 0 & -6i & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}.$$

3. A étant diagonalisable, plus précisément $A = PDP^{-1}$, avec $D = \mathrm{diag}(-6i, -6i, 18)$. Pour prouver l'existence d'une matrice M telle que $M^3 = A$, l'idée est de d'abord faire la même chose avec D. Mais si

$$N = \begin{pmatrix} iw_1\sqrt[3]{6} & 0 & 0 \\ 0 & iw_2\sqrt[3]{6} & 0 \\ 0 & 0 & w_3\sqrt[3]{18} \end{pmatrix}$$

où $w_k \in \{1, j, j^2\}$ pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$, alors on a $N^3 = D$. Posons $M = PNP^{-1}$. Alors

$$M^3 = PN^3P^{-1} = PDP^{-1} = A.$$

4. (a) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ non diagonalisable. A étant diagonalisable et vérifie $A = PDP^{-1}$, donc :

$$M^3 = A \Leftrightarrow M^3 = PDP^{-1} \Leftrightarrow P^{-1}M^2P = D \Leftrightarrow \left(P^{-1}MP\right)^3 = D$$

Si on pose $N = P^{-1}MP$, alors M solution de (1) si, et seulement si, $N^3 = D$.

On pose $N = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, donc

$$ND = DN \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Donc nécessairement $a_{13} = a_{32} = a_{31} = a_{32} = 0$, $N = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$ est donc M est semblable à une matrice de type précédent.

(b) Puisque $N^3 = D$, alors $B^3 = -6i\mathbf{I}_2$, donc $\mathrm{Sp}(B)$ est contenu dans l'ensemble des racines troisième de $-6i$. La factorisation du polynôme $X^3 + 6i = (X - w)(X - wj)(X - wj^2)$, où w est une racine cubique de $-6i$, entraîne $(B - w\mathbf{I}_2)(B - wj\mathbf{I}_2)(B - wj^2\mathbf{I}_2) = 0$.

(c) L'un des facteurs dans le produit $(B - w\mathbf{I}_2)(B - wj\mathbf{I}_2)(B - wj^2\mathbf{I}_2) = 0$ est nécessairement non injectif, donc l'une des valeurs w, wj ou wj^2 est une valeur propre de B.
La matrice B est annulée par un polynôme scindé à racines simples, donc elle est diagonalisable. Ainsi, N est diagonalisable et M serait semblable à une matrice diagonale, donc diagonalisable ce qui est absurde.

•••••••••••