Devoir surveillé $n^\circ 05$
Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

Exercice :

1. (a) Pour tout $x \in \mathbf{R}^3$, on a :

$$\sigma_a^2(x) = \sigma_a(2(x|a)a - x) = 2(x|a)\sigma_a(a) - \sigma_a(x) = 2(x|a)a - (2(x|a)a - x) = x,$$

donc $\sigma_a^2(x) = Id_{\mathbf{R}^3}$.
Si $x \in \mathbf{R}a^\perp$ et non nul, $\sigma_a(x) = -x$ donc $\sigma_a \neq Id_{\mathbf{R}^3}$.

(b) Soit $x \in \mathbf{R}^3$, alors

$$x \in \ker(\sigma_a - Id_{\mathbf{R}^3}) \Leftrightarrow x = 2(x|a)a \Leftrightarrow x \in \mathbf{R}a.$$

Donc $\ker(\sigma_a - Id_{\mathbf{R}^3}) = \mathbf{R}a$. Et

$$x \in \ker(\sigma_a + Id_{\mathbf{R}^3}) \Leftrightarrow (x|a) = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbf{R}a^\perp.$$

Donc $\ker(\sigma_a + Id_{\mathbf{R}^3}) = \mathbf{R}a^\perp$.

(c) Puisque σ_a est une symétrie vectorielle et $\ker(\sigma_a + Id_{\mathbf{R}^3}) = \ker(\sigma_a - Id_{\mathbf{R}^3})^\perp$, alors σ_a est la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\ker(\sigma_a - Id_{\mathbf{R}^3}) = \mathbf{R}a$.

(d) Comme $\mathrm{Vect}(a)$ et $\mathrm{Vect}(a)^\perp$ sont deux sous-espaces orthogonaux de $\mathbf{R}^3$ qui est de dimension finie, alors $\mathbf{R}^3 = \mathrm{Vect}(a) \oplus \mathrm{Vect}(a)^\perp$.
Soit (u, v, w) une base orthonormée de $\mathbf{R}^3$ adaptée à la décomposition $\mathbf{R}^3 = \mathrm{Vect}(a) \oplus \mathrm{Vect}(a)^\perp$. On a $\sigma_a(u) = u$, $\sigma_a(v) = -v$ et $\sigma_a(w) = -w$, donc

$$\mathbf{Mat}_{(u,v,w)}(\sigma_a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a $\det(\sigma_a) = \det(\mathbf{Mat}(u, v, w)(\sigma_a) = 1$.
σ_a est une symétrie orthogonale, donc $\sigma \in \mathscr{O}(\mathbf{R}^3)$. Comme $\det(\sigma_a) = 1$ alors $\sigma_a \in SO(\mathbf{R}^3)$.

2. Soit $r \in SO_3(\mathbf{R})$ et $a \in \mathbf{R}^3$ unitaire. Pour tout $x \in \mathbf{R}^3$, on a :

$$\sigma_a \circ r^{-1}(x) = \sigma_a(r^{-1}(x)) = 2(r^{-1}(x)|a)a - r^{-1}(x) = 2(x|r(a))a - r^{-1}(x),$$

donc

$$r \circ \sigma_a \circ r^{-1}(x) = 2(x|r(a))r(a) - r \circ r^{-1}(x) = 2(x|r(a))r(a) - x = \sigma_{r(a)}(x).$$

D'où

$$r \circ \sigma_a \circ r^{-1} = \sigma_{r(a)}.$$

3. Soit (u, v, w) une base orthonormée de $\mathbf{R}^3$. Pour tout $x \in \mathbf{R}^3$, on a $x = (x|u)u + (x|v)v + (x|w)w$ puisque (u, v, w) est une base orthonormée de $\mathbf{R}^3$.
Donc $\sigma_u \circ \sigma_v(x) = \sigma_u(\sigma_v(x)) = 2(\sigma_v(x)|u)u - \sigma_v(x)$. Or,

$$(\sigma_v(x)|u) = (2(v|x)v - x|u) = 2(v|x)(v|u) - (x|u) = -(x|u)$$

Il vient,

$$\sigma_u \circ \sigma_v(x) = x - 2((x|u)u + (x|v)v) = x - 2(x - (x|w)w) = 2(x|w)w - x = \sigma_w(x).$$

D'où :

$$\sigma_u \circ \sigma_v = \sigma_w.$$

Problème :

Partie I : Préliminaires

1. **Calcul de I_e**

(a) Appliquons le théorème de continuité sous signe intégrale.

Soit la fonction $\begin{array}{rccc} h: & \mathbf{R}\times[0,+\infty[& \to & \mathbf{R} \\ & (x,t) & \mapsto & \dfrac{e^{-(1+t^2)\frac{x^2}{2}}}{1+t^2} \end{array}$

• $\forall x\in\mathbf{R}$, $t\mapsto h(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
• $\forall t\in[0,+\infty[$, $x\mapsto h(x,t)$ est continue sur $\mathbf{R}$.
• $\forall (x,t)\in\mathbf{R}\times[0,+\infty[$, $|h(x,t)|\leq\dfrac{1}{1+t^2}$ et la fonction majorante est intégrable sur $[0,+\infty[$.

Ainsi, $\mathscr{F}$ est continue sur $\mathbf{R}$.

D'autre par, $0\leq h(x,t)\leq\dfrac{e^{\frac{-x^2}{2}}}{1+t^2}$ pour tout $(x,t)\in\mathbf{R}\times[0,+\infty[$. Donc, par intégration, $0\leq\mathscr{F}(x)\leq e^{\frac{-x^2}{2}}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\frac{\pi}{2}e^{\frac{-x^2}{2}}$. Donc on peut déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\mathscr{F}(x)=0$.

(b) Soit la fonction $\begin{array}{rccc} h: & \mathbf{R}\times[0,+\infty[& \to & \mathbf{R} \\ & (x,t) & \mapsto & \dfrac{e^{-(1+t^2)\frac{x^2}{2}}}{1+t^2} \end{array}$

• $\forall x>0$, $t\mapsto h(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$ et intégrable sur $[0,+\infty[$.
• $\forall t\in[0,+\infty[$, $x\mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et l'on a :

$$\forall (x,t)\in\mathbf{R}_+^*\times[0,+\infty[,\ \ \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)=-xe^{-(1+t^2)\frac{x^2}{2}}$$

• $\forall x>0$, $t\mapsto\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.
• Si $[a,b]\subset]0,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right|\leq be^{-(1+t^2)\frac{a^2}{2}}$ et la fonction majorante est intégrable sur $[0,+\infty[$.

Ainsi, $\mathscr{F}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et l'on a $\forall x>0$,

$$\mathscr{F}'(x)=-x\int_0^{+\infty}e^{-(1+t^2)\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}t=-xe^{\frac{-x^2}{2}}\int_0^{+\infty}e^{\frac{-x^2t^2}{2}}\mathrm{d}t.$$

En utilisant le changement de variable $u=xt$, on obtient :

$$\mathscr{F}'(x)=-e^{\frac{-x^2}{2}}\int_0^{+\infty}e^{\frac{-u^2}{2}}\mathrm{d}u=-\alpha e^{\frac{-x^2}{2}}.$$

Donc, pour tout $x>0$, $\mathscr{F}(x)=\displaystyle\int_0^x\mathscr{F}'(t)\mathrm{d}t+cte=-\alpha\int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t+\text{cte}$. Or $\mathscr{F}$ est continue en 0, alors $\mathscr{F}(0)=cte=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\frac{\pi}{2}$. D'où $\mathscr{F}(x)=-\alpha\displaystyle\int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t+\frac{\pi}{2}$.

(c) On a, $\forall x>0$, $\mathscr{F}(x)=\dfrac{\pi}{2}-\alpha\displaystyle\int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t$. En faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient $0=\dfrac{\pi}{2}-\alpha^2$ et comme $\alpha>0$, alors $\alpha=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$. D'où :

$$I_e=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e(t)e^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t=1.$$

2. (a) Si $f\in\mathscr{C}_b(\mathbf{R})$ alors $\left|f(t)e^{\frac{-t^2}{2}}\right|\leq\|f\|_\infty e^{\frac{-t^2}{2}}$ et la fonction majorante est intégrable sur $\mathbf{R}$, donc I_f existe et on a :

$$|I_f|\leq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,e^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t\leq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\|f\|_\infty e^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t=\|f\|_\infty.$$

L'application $\begin{array}{lrcl}\gamma : & (\mathscr{C}_b(\mathbf{R}), \|.\|_\infty) & \to & (\mathbf{R}, |.|) \\ & f & \mapsto & I_f = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t\end{array}$ est linéaire (par linéarité de l'intégrale), de plus $|I_f| \leq \|f\|_\infty$. Donc γ est continue et comme $H = \ker\gamma = \gamma^{-1}(\{0\})$, alors $\mathscr{H}$ est un fermé de $\mathscr{C}_b(\mathbf{R})$ comme image réciproque d'un fermé par une application continue.

(b) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f_n(t)e^{\frac{-t^2}{2}} = t^{2n}e^{\frac{-t^2}{2}} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, donc la fonction $t \mapsto f_n(t)e^{\frac{-t^2}{2}}$ est intégrable sur $\mathbf{R}$, donc I_{f_n} existe. À l'aide d'une intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned}
I_{f_n} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2n}e^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{1}{2n+1}t^{2n+1}e^{\frac{-t^2}{2}}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{2n+1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2n+1}(-t)e^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2n+1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2n+2}e^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2n+1}I_{f_{n+1}}.
\end{aligned}$$

On montre par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ que $I_{f_n} = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$. En effet, $I_{f_0} = I_e = 1$ et si $I_{f_n} = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$ alors

$$I_{f_{n+1}} = (2n+1)I_{f_n} = 2n+1\frac{(2n)!}{2^n n!} = \frac{(2n+2)!}{(2n+2)2^n n!} = \frac{(2(n+2))!}{2^{n+1}(n+1)!}.$$

(c) Puisque f est bornée, alors I_f est bien défini. On a $\cos(\pi t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\pi^{2n}t^{2n}$ pour tout $t \in \mathbf{R}$, donc :

$$I_f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\pi^{2n}t^{2n}\right)e^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}h_n(t)\mathrm{d}t$$

où $h_n(t) = \dfrac{(-1)^n}{(2n)!}\pi^{2n}t^{2n}e^{\frac{-t^2}{2}}$.

Les fonctions h_n sont continues par morceaux et intégrables sur $\mathbf{R}$. La série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{N}} h_n$ converge simplement vers $x \mapsto \cos(\pi t)e^{\frac{-t^2}{2}}$ qui est continue par morceaux sur $\mathbf{R}$ et la série numérique $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{N}^*}\int_{-\infty}^{+\infty}|h_n(t)|\mathrm{d}t$ converge puisque $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|h_n(t)|\mathrm{d}t = \frac{\pi^{2n}}{(2n)!}I_{f_n} = \frac{\pi^{2n}}{2^n n!}$ qui est le terme général d'une série convergente. Donc on peut intégrer terme à terme la série :

$$I_f = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}h_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\pi^{2n}}{2^n n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{-\pi^2}{2}\right)^n}{n!} = e^{\frac{-\pi^2}{2}}.$$

3. Calcul de I_e

(a) Puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}|f(x)| = |l|$, donc pour $\varepsilon = 1$, il existe $A > 0$ tel que $x \geq A \Rightarrow ||f(x)| - |l|| \leq 1$. Donc $|f(x)| \leq |l| + 1$ dès que $x \geq A$.
Par ailleurs f est continue sur le compact $[0, A]$, donc il existe $k > 0$ tel que $\forall x \in [0, A]$, $|f(x)| \leq K$. Ainsi, $\forall x \in [0, +\infty[$, $|f(x)| \leq \max(|l| + 1, K)$ et donc f est bornée sur $[0, +\infty[$.

(b) On a $\Psi'(t) = e^{\frac{-t^2}{2}} + \dfrac{1}{t^2}e^{\frac{-t^2}{2}} = \left(\dfrac{1+t^2}{t^2}\right)e^{\frac{-t^2}{2}} \underset{+\infty}{\sim} e^{\frac{-t^2}{2}}$. D'autre part, par le théorème d'intégration des relations de comparaison, on en déduit que

$$\Phi_e(x) = e^{\frac{x^2}{2}}\int_x^{+\infty}e^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} e^{\frac{x^2}{2}}\int_x^{+\infty}\Psi'(t)\mathrm{d}t = e^{\frac{x^2}{2}}\left[\Psi(t)\right]_x^{+\infty} = \frac{1}{x}.$$

(c) Comme Φ_e est continue sur $\mathbf{R}_+$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\Phi_e(x)=0$ (car $\Phi_e(x)\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{x}$), d'après **3 (a)**, il existe $M>0$ tel que $\forall x\in\mathbf{R}_+$, $|\Phi_e(x)|\leq M$.
De même pour la fonction $x\mapsto x\Phi_e(x)$.

Partie II : Un endomorphisme de $\mathscr{C}_b(\mathbf{R})$

4. (a) Puisque f est bornée sur $\mathbf{R}$, la fonction $t\mapsto f(t)e^{\frac{-t^2}{2}}$ est intégrable sur $[x,+\infty[$, donc Φ_f est bien définie pour tout $x\in\mathbf{R}$.
Pour tout $x\in\mathbf{R}$, on a :

$$|\Phi_f(x)|\leq\|f\|_\infty e^{\frac{x^2}{2}}\int_x^{+\infty}e^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t=\|f\|_\infty\Phi_e(x)\leq M\|f\|_\infty$$

et

$$x\,|\Phi_f(x)|\leq\|f\|_\infty xe^{\frac{x^2}{2}}\int_x^{+\infty}e^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t=\|f\|_\infty x\Phi_e(x)\leq M'\|f\|_\infty$$

(b) Si $f\in\mathscr{H}$ alors $\int_x^{+\infty}f(t)e^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t=-\int_{-\infty}^{x}f(t)e^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t$. Par suite

$$\Phi_f(-x)=e^{\frac{x^2}{2}}\int_x^{+\infty}f(t)e^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t=-e^{\frac{x^2}{2}}\int_{-\infty}^{x}f(t)e^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t=-e^{\frac{x^2}{2}}\int_{-\infty}^{-x}f(t)e^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t$$

Par le changement de variable $u=-t$, on obtient

$$\Phi_f(-x)=-e^{\frac{x^2}{2}}\int_x^{+\infty}f(-u)e^{\frac{-u^2}{2}}\mathrm{d}u=-\Phi_{\widehat{f}}(x).$$

Donc pour $x\in\mathbf{R}^+$

$$|\Phi_f(-x)|=|\Phi_{\widehat{f}}(x)|\leq M\|\widehat{f}\|_\infty=M\|f\|_\infty$$

et

$$|-x\Phi_f(-x)|=|x\Phi_{\widehat{f}}(x)|\leq M'\|f\|_\infty.$$

Ce qui donne les majorations demandées sur $\mathbf{R}$.

5. Pour $f\in\mathscr{C}_b(\mathbf{R})$ et $t\in\mathbf{R}$, $|f(t)-I_f|\leq|f(t)|+|I_f|\leq 2\|f\|_\infty$, donc pour $x\in\mathbf{R}$, $|T(f)(x)|\leq M\|f-I_fe\|_\infty\leq 2M\|f\|_\infty$ et de même $|xT_f(x)|\leq 2M'\|f\|_\infty$.
De plus T_f est continue puisque l'application $x\mapsto\int_x^{+\infty}((f(t)-I_f)e^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t$ est dérivable et l'application $x\mapsto e^{\frac{x^2}{2}}$ est continue. Comme elle est bornée, $T_f\in\mathscr{C}_b(\mathbf{R})$.
T est clairement linéaire, T est bien un endomorphisme continu de $\mathscr{C}_b(\mathbf{R})$ puisque $\|T_f\|_\infty=\sup\limits_{x\in\mathbf{R}}|T_f(x)|\leq 2M\|f\|_\infty$.

6. (a) On a T_f est le produit de deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. L'application $x\mapsto\int_x^{+\infty}((f(t)-I_f)e^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t$ est dérivable de dérivée $x\mapsto(-f(x)+I_f)e^{\frac{-x^2}{2}}$, donc

$$\forall x\in\mathbf{R},\ T_f'(x)=xT_f(x)-f(x)+I_f.$$

(b) La solution de l'équation homogène est donnée par $y_h(x)=ce^{\frac{x^2}{2}}$, de plus T_f est un solution particulière, d'où la solution générale $x\mapsto ce^{\frac{x^2}{2}}+T_f$.

7. Pour $x\in\mathbf{R}$, $T_f'(x)=xT_f(x)-f(x)+I_f$ et donc $|T_f'(x)|\leq|xT_f(x)|+|f(x)|+|I_f|\leq 2(M'+1)\|f\|_\infty$. Ceci montre que $T_f\in\mathscr{C}_b^1(\mathbf{R})$ pour tout $f\in\mathscr{C}_b(\mathbf{R})$.
L'application T n'est pas surjective, par exemple l'application $f:x\mapsto\cos(x^2)$ est dans $\mathscr{C}_b(\mathbf{R})$ mais sa dérivée $f':x\mapsto-2x\sin(x^2)$ n'appartient pas à $\mathscr{C}_b^1(\mathbf{R})$.

Partie III : Étude spectrale de T

8. On remarque que $\forall x \in \mathbf{R}$, $T_e(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \displaystyle\int_x^{+\infty} (1 - I_e) e^{\frac{-t^2}{2}} \mathrm{d}t = \Phi_e(x) - I_e \Phi_e(x) = 0$. Donc 0 est une valeur propre de T et e est un vecteur propre associé.
Si f est un vecteur propre associé à 0, alors $\forall x \in \mathbf{R}$, $0 = f(x) - I_f = 0$ et donc $f = I_f$, c'est-à-dire f est constante. D'où $E_0(T) = \ker(T) = \mathrm{Vect}(e)$, l'espace des fonctions constantes.

9. Soit λ une valeur propre de T alors il existe $f \in \mathscr{C}_b(\mathbf{R})$ non nulle telle que $T_f = \lambda f$. Comme

$$\forall x \in \mathbf{R},\ |T_f(x)| = |\lambda||f(x)| \leq 2M\|f\|_\infty,$$

d'où $|\alpha|\|f\|_\infty \leq 2M\|f\|_\infty$ ce qui donne $|\lambda| \leq 2M$.

10. (a) Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $|S(f)(x) - S(g)(x)| = |\lambda||T_f(x) - T_g(x)| \leq 2M|\lambda|\|f-g\|_\infty$ et $k = 2M|\lambda| < 1$.

(b) Soit $x \in \mathbf{R}$, on a $|f_1(x) - f_0(x)| = |h(x)| \leq \|h\|_\infty$. Supposons la propriété vraie à l'ordre n. On a :

$$|f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x)| = |S(f_{n+1})(x) - S(f_n)(x)| \leq k\|f_{n+1} - f_n\|_\infty \leq k^{n+1}\|h\|_\infty.$$

Comme la série géométrique $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{N}} k^n$ converge, on en déduit la convergence normale et donc uniforme de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{N}} (f_{n+1} - f_n)$.

(c) Soit f la somme de cette série, alors $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (f_{k+1} - f_k) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Par suite f est limite uniforme de la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
Comme $S(f_n) = f_{n+1}$ et $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S(f_n) = \lim_{n\to\infty} (h + \lambda T_{f_n}) = h + \lambda T_f$. Par continuité de l'endomorphisme T, on en déduit que $h + \lambda T_f = f$.

Partie IV : Restriction de T à $\mathscr{C}_b^1(\mathbf{R})$

11. On sait que $\forall x \in \mathbf{R}$, $T_f'(x) = xT_f(x) - f(x) + I_f$, donc si $f \in \mathscr{C}_b^1(x)$ alors T_f' est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et donc $T_f''(x) = T_f(x) + xT_f'(x) - f'(x)$.

12. Soit $x \in \mathbf{R}$, d'après la question précédente on a :

$$|T_f''(x)| \leq |T_f(x)| + |xT_f'(x)| + |f'(x)| \leq 2M\|f\|_\infty + C_1 N(f) + \|f'\|_\infty \leq (\max(2M,1) + C_1)N(f)$$

D'après l'inégalité des accroissements finies appliquée à T_f' on a l'inégalité

$$\left|T_f'(x) - T_f'(y)\right| \leq CN(f)|x-y|.$$

La formule de Taylor-Lagrange assure l'existence d'un élément c entre x et y vérifiant :

$$T_f(x) = T_f(y) + (x-y)T_f'(y) + \frac{(x-y)^2}{2} T_f''(c).$$

Donc

$$\left|T_f(x) - T_f(y) - (x-y)T_f'(y)\right| = \frac{(x-y)^2}{2}|T_f''(c)| \leq \frac{CN(f)}{2}(x-y)^2.$$

Partie V : Applications

13. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $E(X_n) = 0$, puis par linéarité de l'espérance $E(M_n) = \dfrac{1}{\sqrt{n}} E(S_n) = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} E(X_k) = 0$.

De même, $V(X_n) = E(X_n^2) - E(X_n)^2 = E(X_n^2) = 1$, puis par indépendance des variables X_n, on a $V(M_n) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} V(X_k) = 1$.
Soit $\varepsilon > 0$. La variable aléatoire M_n admet une variance finie, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on obtient :

$$p\left(|M_n| \geq \varepsilon\right) = p\left(|M_n - E(M_n)| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{V(M_n)}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

14. On a $X_i(\Omega)=\{-1,1\}$, donc $X_i+1(\Omega)=\{0,2\}$ et $\dfrac{X_i+1}{2}(\Omega)=\{0,1\}$. Par conséquent, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i+1}{2}=\frac{S_n+n}{2}$ est une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0,n]\!]$. De plus $p\left(\dfrac{X_i+1}{2}=0\right)=p(X_i=-1)=\dfrac{1}{2}$ et $p\left(\dfrac{X_i+1}{2}=1\right)=p(X_i=1)=\dfrac{1}{2}$, donc chaque $\dfrac{X_i+1}{2}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p=\dfrac{1}{2}$ et par suite $\dfrac{S_n+n}{2}=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i+1}{2}\right)$ suit une loi binomiale de paramètres n et $p=\dfrac{1}{2}$: $\mathscr{B}\left(n,\dfrac{1}{2}\right)$.

On a donc $\dfrac{S_n+n}{2}(\Omega)=[\![0,n]\!]$ implique $S_n(\Omega)=\{\,2k-n\mid k\in[\![0,n]\!]\,\}$ et pour tout $k\in[\![0,n]\!]$,

$$p(S_n=2k-n)=p\left(\frac{S_n+n}{2}=k\right)=\complement_n^k\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}=\complement_n^k\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

15. D'après l'égalité (1) avec $x=M_n$, on a $-f(M_n)+I_f=T_f'(M_n)-M_nT_f(M_n)$. Par linéarité de l'espérance, on en déduit que

$$I_f-E(f(M_n))=E(T_f'(M_n))-E(M_n))-E(M_nT(f)(M_n)).$$

16. En utilisant l'inégalité (3) avec $x=M_n$ et $y=M_{n,i}$, on a

$$\left|T_f(M_n)-T_f\left(M_{n,i}\right)-\frac{X_i}{\sqrt{n}}T_f'(M_{n,i})\right|\leq\frac{CN(f)}{2n}|X_i|^2.$$

En multipliant par $|X_i|$ on obtient l'inégalité demandée.

$$\left|X_iT_f(M_n)-X_iT_f\left(M_{n,i}\right)-\frac{X_i^2}{\sqrt{n}}T_f'(M_{n,i})\right|\leq\frac{CN(f)}{2n}|X_i|^3$$

Comme $E(X_iT_f(M_{n,i}))=E(X_i)E\left(T_f(M_{n,i})\right)=0$, car les variables X_i et $T_f'(M_{n,i})$ sont indépendantes puisque $M_{n,i}=\dfrac{S_n-X_i}{\sqrt{n}}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\sum_{j\neq i}X_i$ et $E(X_i)=0$. De plus $E(X_i^2)=1$, donc

$$E\left(\frac{X_i^2}{\sqrt{n}}T_f'(M_{n,i})\right)=E(X_i^2)E\left(\frac{1}{\sqrt{n}}T_f'(M_{n,i})\right)=\frac{1}{\sqrt{n}}E(T_f'(M_{n,i})),$$

on obtient

$$\begin{aligned}\left|E\left(X_iT_f(M_n)-X_iT_f(M_{n,i})-\frac{X_i^2}{\sqrt{n}}T_f'(M_{n,i})\right)\right| &\leq E\left(\left|X_iT_f(M_n)-X_iT_f(M_{n,i})-\frac{X_i^2}{\sqrt{n}}T_f'(M_{n,i})\right|\right)\\ &\leq \frac{CN(f)}{2n}E(|X_i|^3)\end{aligned}$$

et donc

$$\left|E\left(X_iT_f(M_n)\right)-\frac{1}{\sqrt{n}}E\left(T_f'(M_{n,i})\right)\right|\leq\frac{CN(f)}{2n}$$

car $E\left(|X_i)^3\right)=1$.

17. On a

$$\begin{aligned}E(M_nT_f(M_n))-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(T_f'(M_{n,i})) &= \sum_{i=1}^{n}E\left(\frac{X_i}{\sqrt{n}}T_f(M_n)\right)-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\left(T_f'(M_{n,i})\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\left(\sum_{i=1}^{n}E\left(X_iT_f(M_n)\right)\right)-\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}E\left(T_f'(M_{n,i})\right)\right)\end{aligned}$$

Par suite

$$\left|E(M_nT_f(M_n))-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(T_f'(M_{n,i}))\right|\leq\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\frac{CN(f)}{2n}=\frac{CN(f)}{2\sqrt{n}}.$$

18. En utilisant l'inégalité (3), on a pour tout $1 \leq i \leq n$

$$\left|T_f'(M_n) - T_f'(M_{n,i})\right| \leq \frac{CN(f)|X_i|}{\sqrt{n}}$$

On appliquant l'espérance on obtient

$$\left|E\left(T_f'(M_n)\right) - E\left(T_f'(M_{n,i})\right)\right| \leq \frac{CN(f)E(|X_i|)}{\sqrt{n}}$$

D'où

$$\left|E\left(T_f'(M_n)\right) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left(T_f'(M_{n,i})\right)\right| = \frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^{n} E\left(T_f'(M_n)\right) - E\left(T_f'(M_{n,i})\right)\right| \leq \frac{CN(f)}{\sqrt{n}}$$

19. On écrit :

$$\begin{aligned}
|E(f(M_n)) - I_f| &= \left|E\left(T_f'(M_n) - M_n T_f(M_n)\right)\right| \\
&\leq \left|E(T_f'(M_n)) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(T_f'(M_{n,i}))\right| + \left|E(M_n T_f(M_n)) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(T_f'(M_{n,i}))\right| \\
&\leq \frac{3CN(f)}{2\sqrt{n}}.
\end{aligned}$$

D'où $\lim\limits_{n\to\infty} E(f(M_n)) = I_f = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{\mathbf{R}} f(t)e^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t.$

20. On pose $f(x) = \cos(\pi x)$. Par le théorème de transfert,

$$\begin{aligned}
E(f(M_n)) &= E\left(f\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \cos\left(\pi\left(\frac{2k-n}{\sqrt{n}}\right)\right) p(S_n = 2k-n) \\
&= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} \complement_n^k \cos\left(\pi\left(\frac{2k-n}{\sqrt{n}}\right)\right)
\end{aligned}$$

D'après les questions **19.** et **2.(c)**, on a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \complement_n^k \cos\left(\pi\left(\frac{2k-n}{\sqrt{n}}\right)\right) = I_f = e^{\frac{-\pi^2}{2}}$.

●●●●●●●●●●