Devoir surveillé $n^\circ 06$
Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

••••••••••

Problème 1 : La fonction Dilogarithme

Partie I - Propriétés

1. La fonction φ définie sur $[-1,0[\cup]0,1[$ définie par $\varphi(t)=-\dfrac{\ln(1-t)}{t}$ est continue sur $[-1,0[\cup]0,1[$ et se prolonge par continuité en 0. Elle est donc intégrable sur tout sous-intervalle contenu dans $[-1,1[$ et par conséquent $\mathbf{Li}(x)$ existe pour tout $x\in[-1,1[$.

2. On a $\dfrac{\ln(1-t)}{t} \underset{1^-}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$ et $t\mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ est intégrable sur $[0,1]$, donc par comparaison d'intégrales, $\displaystyle\int_0^1 -\frac{\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t$ converge ce qui signifie que $\mathbf{Li}$ a une limite finie en 1.
D'autre part, $\mathbf{Li}$ est continue sur $[-1,1[$ (primitive d'une fonction continue sur cet intervalle) donc $\mathbf{Li}$ est prolongeable par continuité en 1.

3. (a) D'après le développement en série entière de la fonction $t\mapsto\ln(1-t)$, pour $t\in]-1,1[$,

$$-\frac{\ln(1-t)}{t}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{n}$$

et cette série converge normalement sur tout segment de $]-1,1[$(d'après le lemme d'Abel), en particulier sur tout intervalle d'extrémités 0 et x pour $x\in]-1,1[$. On peut donc intervertir somme et intégrale :

$$\mathbf{Li}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{t^{n-1}}{n}\mathrm{d}t$$

d'où

$$\forall x\in]-1,1[,\quad \mathbf{Li}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}.$$

(b) Pour $x\in]-1,1]$ et pour $n\in\mathbf{N}^*$, $\left|\dfrac{x^n}{n^2}\right|\leq\dfrac{1}{n^2}$ et la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{N}^*}\frac{1}{n^2}$ converge donc la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{N}^*}\frac{x^n}{n^2}$ converge normalement sur $]-1,1]$ et la somme est en particulier continue en 1, $\mathbf{Li}$ est aussi continue en 1 donc, d'après la question précédente

$$\mathbf{Li}(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

d'où $\mathbf{Li}(1)=\dfrac{\pi^2}{6}$.

4. (a) Soit $f: x\mapsto \mathbf{Li}(x)+\mathbf{Li}(1-x)$. $\mathbf{Li}$ est une primitive de la fonction continue φ donc est dérivable sur $[-1,1[$ et, par composition et somme, f est dérivable sur $]0,1[$ avec, pour $x\in]0,1[$, $f'(x)=\varphi(x)-\varphi(1-x)$. Ainsi

$$\forall x\in]0,1[,\quad f'(x)=-\frac{\ln(1-x)}{x}+\frac{\ln x}{1-x}.$$

(b) Soit g la fonction définie sur $]0,1[$ par $g(x)=\dfrac{\pi^2}{6}-\ln(1-x)\ln(x)$ si $x\in]0,1[$. La fonction g est dérivable sur $]0,1[$ et, pour $x\in]0,1[$, $g'(x)=\dfrac{\ln x}{1-x}-\dfrac{\ln(1-x)}{x}$. Ainsi f et g sont deux fonctions continues sur $[0,1]$, dérivables sur $]0,1[$ et ont la même dérivée sur $]0,1[$ donc il existe $c\in R$ tell que :

$$\forall x\in[0,1],\quad f(x)-g(x)=c.$$

De plus $f(1)=\dfrac{\pi^2}{6}$ ($\mathbf{Li}(1)=\dfrac{\pi^2}{6}$ et $\mathbf{Li}(0)=0$) donc

$$\forall x\in]0,1[,\quad \mathbf{Li}(x)+\mathbf{Li}(1-x)=\frac{\pi^2}{6}-\ln(1-x)\ln(x).$$

5. En particulier pour $x=\dfrac{1}{2}$, $2\mathbf{Li}(\frac{1}{2})=\dfrac{\pi^2}{6}-\left(\ln\dfrac{1}{2}\right)^2$. Donc, en utilisant la question **3.a**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^2}=\frac{\pi^2-6(\ln 2)^2}{12}.$$

6. (a) Soit h la fonction définie sur $]-1,1[$ par $h(x)=\mathbf{Li}(x)+\mathbf{Li}(-x)-\dfrac{1}{2}\mathbf{Li}(x^2)$. $\mathbf{Li}$ est dérivable sur $]-1,1[$ et, pour $x\in]-1,1[$,

$$h'(x)=\frac{-\ln(1-x)}{x}+\frac{\ln(1+x)}{-x}+2x\frac{\ln(1-x^2)}{x^2}=0.$$

De plus $h(0)=0$ donc, h est identiquement nulle :

$$\forall x\in]-1,1[,\quad \mathbf{Li}(x)+\mathbf{Li}(-x)=\frac{1}{2}\mathbf{Li}(x^2).$$

(b) $\mathbf{Li}$ est continue en 1 et en -1 donc la relation ci-dessus est encore valable en -1 :

$$\mathbf{Li}(-1)+\mathbf{Li}(1)=\frac{1}{2}\mathbf{Li}(1)$$

d'où $\mathbf{Li}(-1)=-\dfrac{1}{2}\mathbf{Li}(1)=-\dfrac{\pi^2}{12}$. Avec la question **3.a**, on a alors

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12}.$$

7. (a) Soit k la fonction définie sur

$$k(x)=\mathbf{Li}(x)-\mathbf{Li}(-x)+\mathbf{Li}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)-\mathbf{Li}\left(\frac{x-1}{1+x}\right)-\frac{\pi^2}{4}-\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\ln x.$$

Par composition la fonction k est dérivable sur $]0,1[$, et pour $x\in]0,1[$, on a :

$$\begin{aligned}
k'(x) &= -\frac{\ln(1-x)}{x}+\frac{\ln(1+x)}{x}+\frac{2}{(1+x)^2}\frac{\ln\left(1-\frac{1-x}{1+x}\right)}{\frac{1-x}{1+x}}\\
&\quad+\frac{2}{(1+x)^2}\frac{\ln\left(1-\frac{x-1}{1+x}\right)}{\frac{x-1}{1+x}}-\frac{\frac{2}{(1-x)^2}}{\frac{1+x}{1-x}}\ln x-\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\\
&= \frac{2}{1-x^2}\ln\left(\frac{2x}{1+x}\right)+\frac{2}{x^2-1}\ln\left(\frac{2}{1+x}\right)-\frac{2}{1-x^2}\ln x\\
&= 0.
\end{aligned}$$

On a de plus , comme $\mathbf{Li}$ est continue sur $[-1,1]$,

$$\lim_{x\to 0}\mathbf{Li}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\mathbf{Li}(1)=\frac{\pi^2}{6},\ \lim_{x\to 0}\mathbf{Li}\left(\frac{x-1}{1+x}\right)=\mathbf{Li}(-1)=-\frac{\pi^2}{12}.$$

$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\ln x=\ln\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)\underset{0}{\sim}2x\ln(x)$ donc $\lim_{x\to 0}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\ln x=0.$

Finalement k est prolongeable par continuité en 0 avec $k(0)=\frac{\pi^2}{6}+\frac{\pi^2}{12}-\frac{\pi^2}{4}=0$. On peut alors conclure que, pour tout $x\in]0,1[$,

$$\mathbf{Li}(x)-\mathbf{Li}(-x)+\mathbf{Li}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)-\mathbf{Li}\left(\frac{x-1}{1+x}\right)=\frac{\pi^2}{4}+\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\ln x.$$

(b) On utilise cette relation avec $x=\sqrt{2}-1$, on alors $\frac{1-x}{1+x}=\sqrt{2}-1$ et $\frac{x-1}{1+x}=1-\sqrt{2}$ et donc

$$2(\mathbf{Li}(\sqrt{2}-1)-\mathbf{Li}(1-\sqrt{2}))=\frac{\pi^2}{4}+\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)\ln(\sqrt{2}-1)=\frac{\pi^2}{4}-(\ln(\sqrt{2}-1))^2$$

Par ailleurs, $\mathbf{Li}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ donc $\mathbf{Li}(x)-\mathbf{Li}(-x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$ et

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{2}-1)^{2n+1}}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{16}-\frac{(\ln(\sqrt{2}-1))^2}{4}.$$

8. La fonction sous signe intégrale $x\mapsto\frac{x}{e^x-1}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et se prolonge par continuité en 0 puisque $\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}=1$, de plus $\frac{e^x}{e^x-1}\underset{+\infty}{=}o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{x}{e^x-1}\mathrm{d}x$ converge.
On fait le changement de variable indiqué qui est bien monotone de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$. L'égalité $t=1-e^{-x}$ donne $x=-\ln(1-t)$ et donc $\mathrm{d}x=\frac{1}{1-t}\mathrm{d}t$. D'où :

$$J=\int_0^{+\infty}\frac{x}{e^x-1}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{-\ln(1-t)}{\frac{1}{1-t}-1}\frac{1}{1-t}\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{-\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t=\frac{\pi^2}{6}$$

Partie II - Résolution d'une équation différentielle

9. (a) l'équation différentielle $xz'+z=0$ est linéaire du premier ordre sans second membre. Sur un intervalle ne contenant pas 0, les solutions sont de la forme :

$$z:x\mapsto z(x)=A\exp\left(-\int_1^x\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)=A\exp(-\ln|x|)=\frac{A}{|x|}.$$

Quitte à changer A, qui est arbitraire, en $-A$ sur un intervalle où $x<0$, la solution générale de l'équation homogène sur K est donc de la forme : $x\mapsto z(x)=\frac{A}{x}$.

(b) Le résultat demandé revient à montrer que φ est solution (particulière) de $xz'+z=\frac{1}{1-x}$ sur $[-1,0[$ et sur $]0,1[$.
On a déjà calculé sur ces intervalles :

$$\varphi'(x)=\frac{x+(1-x)\ln(1-x)}{x^2(1-x)}.$$

Donc :

$$x\varphi'(x)+\varphi(x)=\frac{x+(1-x)\ln(1-x)}{x(1-x)}-\frac{\ln(1-x)}{x}=\frac{1}{1-x}+\frac{\ln(1-x)}{x}-\frac{\ln(1-x)}{x}=\frac{1}{1-x}.$$

La solution générale de $xz'+z=\dfrac{1}{1-x}$ sur $[-1,0[$ ou sur $]0,1[$ est donc :

$$x\mapsto z(x)=\varphi(x)+\frac{A}{x}.$$

10. La solution générale de $xy''+y'=\dfrac{1}{1-x}$ sur $[-1,0[$ ou sur $]0,1[$ est donc une primitive arbitraire des précédentes. Rappelons que sur les intervalles indiqués, **Li** est une primitive de φ. On a donc :

$$x\mapsto y(x)=\mathbf{Li}(x)+A\ln|x|+B,$$

solution générale de $xy''+y'=\dfrac{1}{1-x}$ sur $[-1,0[$ ou sur $]0,1[$.

11. (a) Sur $[-1,0[$, on a : $y(x)=\mathbf{Li}(x)+A_1\ln(-x)+B_1$, tandis que sur $]0,1[$, on a : $y(x)=\mathbf{Li}(x)+A_2\ln(x)+B_2$. A_1,A_2,B_1 et B_2 sont des constantes.

(b) Comme y est solution sur $[-1,1[$, elle est définie et continue en 0, ce qui entraîne $A_1=A_2=0$ pour que les limites (finies) existent.
Ainsi, sur $[-1,0[$, on a : $y(x)=\mathbf{Li}(x)+B_1$, tandis que sur $]0,1[$, on a : $y(x)=\mathbf{Li}(x)+B_2$, ce qui entraîne $B_1=B_2$, qu'on note B, pour que ces limites (finies) soient égales. Finalement, si y est solution sur $[-1,1[$, alors, nécessairement : $y=\mathbf{Li}(x)+B$.

(c) Il suffit maintenant de montrer que $x\mapsto\mathbf{Li}(x)+B$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[-1,1[$, ce qui est vrai puisque **Li** l'est !
Finalement, les solutions de $xy''+y'=\dfrac{1}{1-x}$ sur $[-1,1[$ sont les fonctions :

$$y:x\mapsto y(x)=\mathbf{Li}(x)+B$$

où B est une constante.

Problème 2. Les urnes de Polya

Partie I-Préliminaires

1. On a $X_1(\Omega))=\{0,1\}$. Donc X_1 suit une loi de Bernoulli (B,p) de paramètre $p=p(X_1=1)$. Au départ il y a b boules blanches et r boules rouges dans l'urne, donc par équiprobabilité de tirage, $p=p(X_1=1)=\dfrac{b}{b+r}$.

2. Après le premier tirage, donnant une boule blanche, l'urne contient $b+r+1$ boules dont $b+1$ sont blanches, donc$p(X_2=1|X_1=1)=\dfrac{b+1}{b+r+1}$.
De même $p(X_2=0|X_1=1)=\dfrac{r}{b+r+1}$. La loi conditionnelle de X_2 sachant $(X_1=1)$ est donc une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{b+1}{b+r+1}$.
Utilisons la formule des probabilités totales avec le système complet des événements $\{(X_1=1),(X_1=0)\}$. Ce qui donne :

$$p(X_2=1)=p(X_2=1|X_1=1)p(X_1=1)+p(X_2=1|X_1=0)p(X_1=0).$$

Ainsi avec la question **1.**, on a :

$$p(X_2=1)=\frac{b+1}{b+r+1}\frac{b}{b+r}+\frac{b}{b+r+1}\frac{r}{b+r}=\frac{b}{b+r}.$$

Donc X_2 suit une loi de Bernoulli de paramètre $p=\dfrac{b}{b+r}$.

3. La variable aléatoire S_n donne le nombre de boules blanches après le n-ème tirage, et vu qu'il y a au départ b boules blanches et qu'à chaque tirage on ajoute une boule blanche ou rouge, alors on a :

$$S_n(\Omega)=\{\,b,b+1,...,b+n\,\}\,.$$

Partie II-La loi de X_n

4. Avant de procéder au $n+1$-ème tirage, sachant que $S_n = k$, l'urne contient k boules blanches sur un total de $b+r+n$ boules, donc :

$$p(X_{n+1} = 1|S_n = k) = \frac{k}{b+r+n}.$$

5. Appliquons la formule des probabilités totales avec le système complet des événements associé à la variable aléatoire S_n, on a :

$$p(X_{n+1} = 1) = \sum_{k=b}^{n+b} p(X_{n+1} = 1|S_n = k)p(S_n = k),$$

donc avec le résultat de la question **4.**, on obtient la formule demandée :

$$p(X_{n+1} = 1) = \sum_{k=b}^{n+b} \frac{k}{b+r+n} p(S_n = k) = \frac{1}{b+r+n} \sum_{k=b}^{n+b} kp(S_n = k) = \frac{1}{b+r+n} E(S_n).$$

6. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$ que la variable aléatoire X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{b}{b+r}$.
D'aprs la question **1.**, la propriété est vraie si $n = 1$. Supposons qu'elle est vraie jusqu'au rang n, $n \in \mathbf{N}^*$. On a $X_{n+1}(\Omega) = \{0, 1\}$, donc X_{n+1} suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = P(X_{n+1} = 1)$. Ensuite par linéarité de l'espérance et hypothèse de récurrence (forte),

$$E(S_n) = b + n\frac{b}{b+r} = b\frac{b+r+n}{b+r},$$

qu'il suffit de remplacer dans le résultat précédente, qui donne bien

$$p(X_{n+1} = 1) = \frac{b}{b+r}.$$

Partie III-La loi de S_n dans un cas particulier

7. Puisque $b = 1$, l'événement $S_n = 1$ correspond à "on n'a tiré que des boules rouges aux n premiers tirages", soit

$$(S_n = 1) = (X_1 = 0, X_2 = 0, \dots, X_n = 0).$$

8. Utilisons la formule des probabilités composées qui donne :

$$\begin{aligned} p(S_n = 1) &= p((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0) \cap \dots \cap (X_n = 0)) \\ &= p(X_1 = 0) \times p(X_2 = 0|X_1 = 0) \times \dots \times p(X_n = 0|(X_1 = 0) \cap (X_2 = 0) \cap \dots \cap (X_{n-1} = 0)). \end{aligned}$$

Les probabilités conditionnelles sont données par :

$$p(X_1 = 0) = \frac{1}{2},\ p(X_2 = 0|X_1 = 0) = \frac{2}{3},\ p\left(X_n = 0|(X_1 = 0) \cap (X_2 = 0) \cap \dots \cap (X_{n-1} = 0)\right) = \frac{n}{n+1}.$$

Après simplification, on obtient :

$$p(S_n = 1) = \frac{1}{n+1}.$$

9. • Si $S_{n+1} = k$, alors forcément $S_n = k$ ou $S_n = k-1$. Ainsi les probabilités $p(S_{n+1} = k|S_n = l) = 0$ pour $l \notin \{k-1, k\}$.

• $p(S_{n+1} = k|S_n = k-1) = \dfrac{k-1}{n+2}$ correspond à une urne de $n+2$ boules dont $k-1$ sont blanches dont on tire une boule blanche.

• $p(S_{n+1} = k|S_n = k) = \dfrac{n+2-k}{n+2}$ correspond à une urne de $n+2$ boules dont k sont blanches, donc $n+2-k$ rouges, dont on tire une rouge.

10. C'est la formule des probabilités totales appliquée au système complet des événements $((S_n = l))_{1 \leq l \leq n+1}$.

11. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$ que S_n suit une loi uniforme sur $\{1, 2, ..., n+1\}$. Pour $n = 1$, on a $S_1(\Omega) = \{1, 2\}$, et $(S_1 = 1) = (X_1 = 0)$. Donc, avec la question **1.**, $p(S_1 = 1) = p(X_1 = 0) = \dfrac{1}{2}$ et $(S_1 = 2) = (X_1 = 1)$, donc toujours avec la question **1.**, $p(S_1 = 1) = p(X_1 = 1) = \dfrac{1}{2}$. Donc X_1 suit bien une loi uniforme sur $\{1, 2\}$.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Supposons que S_n suit une loi uniforme sur $\{1, 2, ..., n\}$. D'abord la question **3.**, on a :

$$S_{n+1}(\Omega) = \{1, 2, ..., n+2\}.$$

Puis d'après l'hypothèse de récurrence et le résultat de la question **10.**, pour $k \in \{2, 3, ..., n+1\}$, on a :

$$p(S_{n+1} = k) = \frac{k-1}{n+2}\frac{1}{n+1} + \frac{n+2-k}{n+2}\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+2}.$$

De plus d'après la question **8.**, on a :

$$p(S_{n+1} = 1) = \frac{1}{n+2} \text{ et } p(S_{n+1} = n+2) = \frac{1}{n+2}.$$

Ainsi S_{n+1} suit une loi uniforme sur $\{1, 2, ..., n+2\}$.

• • • • • • • • • • •