

Devoir surveillé n°01

Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

• • • • •

Exercice I

1. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & x' & z' \\ 0 & 1 & y' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont deux éléments de G , alors $AB = \begin{pmatrix} 1 & x+x' & z+z'+xy' \\ 0 & 1 & y+y' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est bien un élément de G . Donc G est stable par la multiplication.

2. Il est clair que $I_3 \in G$. De plus si $A = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est un élément de G , les calculs précédents montrent que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -x & -z+xy \\ 0 & 1 & -y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et donc que } A^{-1} \text{ est un élément de } G. \text{ Ainsi } (G, \times) \text{ est un sous-groupe de } \mathbf{GL}_3(\mathbf{R}), (\times).$$

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$. Alors A commute avec tous les éléments de G si et seulement si, pour toute matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & x' & z' \\ 0 & 1 & y' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, AM = MA. \text{ Le seul coefficient qui diffère entre } AM \text{ et } MA \text{ est le coefficient d'indice } (1, 3)$$

(la première ligne de la troisième colonne), et on trouve $AM = MA \Leftrightarrow xy' = x'y$. Choissant $y' = 1$ et $x' = 0$, on trouve $x = 0$ puis choissant $x' = 1$ et $y' = 0$, on trouve $y = 0$. Réciproquement, si $x = y = 0$, on a bien $AM = MA$. D'où :

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbf{R} \right\}.$$

Exercice II

1. L'application $\det$ est un morphisme de groupes de $(\mathbf{GL}_n(\mathbf{R}), \cdot)$ dans $(\mathbf{R}^*, \times)$, donc $\mathbf{SL}_2(\mathbf{R}) = \det^{-1}(\{1\})$ est un sous-groupe de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{R})$, en particulier $\mathbf{SL}_2(\mathbf{R})$ est stable par multiplication.

Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}_2(\mathbf{R})$ et $z \in \mathbb{H}$, on a :

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2} = \frac{ac|z|^2 + bd + (a+c)x + iy}{|cz+d|^2}$$

En particulier, on a $\operatorname{Im} \left(\frac{az+b}{cz+d} \right) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|cz+d|^2}$ est strictement positif, donc $\mathbb{H}$ est stable par φ_M .

$$\bullet I_2 z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z = \frac{z+0}{0+1} = z.$$

• Si $M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ sont deux éléments de $\mathbf{SL}_2(\mathbf{R})$ et si $z \in \mathbb{H}$, alors

$$\begin{aligned} \frac{a_1 \varphi_N(z) + b_1}{c_2 \varphi_N(z) + d_1} &= \frac{a_1 \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} + b_1}{c_1 \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} + d_1} \\ &= \frac{(a_1 a_2 + b_1 c_2)z + (a_1 b_2 + b_1 d_2)}{(c_1 a_2 + d_1 c_2)z + (c_1 b_2 + d_1 d_2)} \end{aligned}$$

et

$$MN = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{pmatrix}$$

ce qui permet de conclure que $\varphi_{MN} = \varphi_M \circ \varphi_N$.

2. D'après ce qui précède, si $M \in \mathbf{SL}_2(\mathbf{R})$ alors $I_2 = \varphi_{MM^{-1}} = \varphi_M \circ \varphi_{M^{-1}}$, ce qui montre que φ_M est une bijection de $\mathbb{H}$ et que $(\varphi_M)^{-1} = \varphi_{M^{-1}}$.

L'application $M \mapsto \varphi_M$ est donc un isomorphisme de groupes et par conséquent G est un groupe comme image d'un groupe par un isomorphisme.

3. Soit φ_M un élément de G avec $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}_2(\mathbf{R})$. Considérons les applications $h_1 : z \mapsto c^2z$, $h_2 : z \mapsto z + cd$, $h_3 : z \mapsto -\frac{1}{z}$, $h_4 : z \mapsto z + \frac{a}{c}$.

Pour tout $z \in \mathbb{H}$, on a :

$$h_4 \circ h_3 \circ h_2 \circ h_1(z) = h_4 \circ h_3 \circ h_2(c^2z) = h_4 \circ h_3(c^2z + cd) = h_4\left(-\frac{1}{c^2z + cd}\right) = \frac{a}{c} - \frac{1}{c^2z + cd} = \frac{az + b}{cz + d} = \varphi_M(z)$$

Donc φ_M est composée des applications du type $z \mapsto \frac{1}{z}$, $z \mapsto z + t$ et $z \mapsto kz$ où $t \in \mathbf{R}$ et $k \in \mathbf{R}_+^*$.

4. On remarque que si θ_1 et θ_2 sont des réels, alors :

$$R_{\theta_1} \circ R_{\theta_2} = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix} = R_{\theta_1 + \theta_2}.$$

Donc on peut conclure que l'application $\chi : \theta \mapsto r_\theta$ est un morphisme de groupes de $(\mathbf{R}, +)$ dans $(G, \circ)$.

$\ker \chi = \{ \theta \in \mathbf{R} \mid \chi(\theta) = \mathbf{Id}_{\mathbb{H}} \}$. Mais

$$\begin{aligned} \chi(\theta) = \mathbf{Id}_{\mathbb{H}} &\Leftrightarrow \forall z \in \mathbb{H}, \varphi_{R_\theta}(z) = z \\ &\Leftrightarrow \forall z \in \mathbb{H}, \frac{\cos \theta z - \sin \theta}{\sin \theta z + \cos \theta} = z \\ &\Leftrightarrow \forall z \in \mathbb{H}, \cos \theta z - \sin \theta = \sin \theta z^2 + \cos \theta z \\ &\Leftrightarrow \forall z \in \mathbb{H}, (z^2 - 1) \sin \theta = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{Z} \text{ tel que } \theta = k\pi. \end{aligned}$$

D'où $\ker \chi = \pi\mathbf{Z}$.

Problème

1. (a) Soient f et g deux éléments de F_α et $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, il existe P_1, P_2, Q_1, Q_2 des polynômes de $\mathbf{R}_1[X]$ tels que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = P_1(x)e^x + Q_1(x)e^{-x}$ et $g(x) = P_2(x)e^x + Q_2(x)e^{-x}$, alors

$$(\lambda f + \mu g)(x) = (\lambda P_1(x) + \mu P_2(x))e^x + (\lambda Q_1(x) + \mu Q_2(x))e^{-x}.$$

Donc on a bien $\lambda f + \mu g \in F_\alpha$ et par conséquent F_α est un sous espace vectoriel de E .

- (b) Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ des réels tels que $\lambda f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = 0$, donc pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \lambda_3 f_3(x) + \lambda_4 f_4(x) = 0$. Pour $x = 0$ on obtient $\lambda_1 + \lambda_3 = 0$ et quand x tend vers $+\infty$, on obtient $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ (si $\alpha > 0$) ou $\lambda_3 + \lambda_4 = 0$ (si $\alpha < 0$). Dans tous les on a nécessairement $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. La famille est donc libre, et comme cette famille engendre F_α , alors elle forme une base de F_α .
2. (a) Il est clair que l'application D est linéaire, et comme si f est indéfiniment dérivable, $f' = D(f)$ est aussi indéfiniment dérivable, alors D est un endomorphisme de E .
Le noyau de D est décrit par les fonctions de E dont la dérivée est nulle, c'est-à-dire les fonctions constantes

sur $\mathbf{R}$.

Soit $g \in E$, considérons la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f : x \mapsto \int_0^x g(t)dt.$$

On a bien $D(f) = g$, ceci montre que D est surjective, donc $\text{Im}(D) = E$.

- (b) D_α étant linéaire, comme restriction d'une application linéaire. De plus si $f : x \mapsto P(x)e^x + Q(x)e^{-x} \in F_\alpha$, alors $D_\alpha(f) : x \mapsto (P'(x) + \alpha P(x))e^x + (Q'(x) - \alpha Q(x))e^{-x} \in F_\alpha$, donc D_α est un endomorphisme de F_α .
- (c) On a $D(f_1) = f_1' = \alpha f_1$, $D(f_2) = f_2' = f_1 + \alpha f_2$, $D(f_3) = f_3' = -\alpha f_3$ et $D(f_4) = f_4' = f_4 - \alpha f_4$. D'où la matrice M_α dans la base $\mathcal{B}$:

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \end{pmatrix}.$$

(d) La matrice M_α est de rang 4, donc elle est inversible.

3. La matrice de $D_\alpha^2 - \lambda \text{id}_\alpha$ dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$M_\alpha^2 - \lambda I_4 = \begin{pmatrix} \alpha^2 - \lambda & 2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 - \lambda & -2\alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Donc si $\lambda = \alpha^2$, $\text{rg}(D_\alpha^2 - \lambda \text{id}_\alpha) = 2$ et si $\lambda \neq \alpha^2$, $\text{rg}(D_\alpha^2 - \lambda \text{id}_\alpha) = 4$.

4. (a) Dans ce cas ($\lambda = \alpha^2$), on a :

$$M_\alpha^2 - \alpha^2 I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que $\ker(D_\alpha^2 - \lambda \text{id}_\alpha) = \text{Vect}\{f_1, f_3\}$ et $\text{Im}(D_\alpha^2 - \lambda \text{id}_\alpha) = \text{Vect}\{f_1, f_3\}$.

- (b) On a, pour $i = 1$ et $i = 2$, $(D_\alpha^2 - \lambda \text{id}_\alpha)(f_i) = 0$ et donc $(D_\alpha^2 - \lambda \text{id}_\alpha)^2(f_i) = 0$. D'autre part, $\text{Im}(D_\alpha^2 - \lambda \text{id}_\alpha) = \text{Vect}\{f_1, f_3\}$, donc $\text{Im}(D_\alpha^2 - \lambda \text{id}_\alpha)^2 = (D_\alpha^2 - \lambda \text{id}_\alpha)(\text{Vect}\{f_1, f_3\}) = \{0\}$, ceci implique que $(D_\alpha^2 - \lambda \text{id}_\alpha)^2 = 0$.
- (c) On a $0 = (D_\alpha^2 - \alpha^2 \text{id}_\alpha)^2 = D_\alpha^4 - 2\alpha^2 D_\alpha + \alpha^2 \text{id}_\alpha^2$. Ceci de déduire l'expression de D_α^{-1} :

$$D_\alpha^{-1} = \frac{-1}{\alpha^4} D_\alpha^3 + \frac{2}{\alpha^2} D_\alpha.$$

5. (a) La solution générale, sur $\mathbf{R}$, de l'équation différentielle $y''(x) - \alpha^2 y(x) = 0$ est la forme

$$y : x \mapsto A e^{\alpha x} + B e^{-\alpha x},$$

où A et B sont des nombres réels.

- (b) Une application f est dans le noyau de $D^2 - \alpha^2 \text{Id}$ si, et seulement si, f est solution de l'équation différentielle $y''(x) - \alpha^2 y(x) = 0$. D'où

$$\ker(D^2 - \alpha^2 \text{Id}) = \{x \mapsto A e^{\alpha x} + B e^{-\alpha x} / A, B \in \mathbf{R}\} = \text{Vect}\{f_1, f_3\}.$$

- (c) Soit $f \in \ker(D^2 - \alpha^2 \text{Id})^2$, alors $(D^2 - \alpha^2 \text{Id})(f) \in \ker(D^2 - \alpha^2 \text{Id}) = \text{Vect}\{f_1, f_3\}$, donc il existe des constantes λ_1 et λ_3 telles que $(D^2 - \alpha^2 \text{Id})(f) = \lambda_1 f_1 + \lambda_3 f_3$.
D'autre part :

$$\begin{aligned}
 (D^2 - \alpha^2 Id)(g) &= (D^2 - \alpha^2 Id)(f) - \frac{\lambda_1}{2\alpha}(D^2 - \alpha^2 Id)(f_2) + \frac{\lambda_3}{2\alpha}(D^2 - \alpha^2 Id)(f_4) \\
 &= \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 - \frac{\lambda_1}{2\alpha}(2\alpha f_1) + \frac{\lambda_3}{2\alpha}(-2\alpha f_3) = 0
 \end{aligned}$$

$g \in \ker(D^2 - \alpha^2 Id) = \text{Vect}\{f_1, f_2\}$, donc il existe des nombres réels C et D tels que $g = Cf_1 + Df_3$ et donc $f = Cf_1 + Df_3 + \frac{\lambda_1}{2\alpha}f_2 - \frac{\lambda_3}{2\alpha}f_4$. Ainsi

$$\ker(D^2 - \alpha^2 Id)^2 = \text{Vect}\{f_1, f_2, f_3, f_4\} = F_\alpha.$$

6. Une application f est solution de l'équation différentielle $y^{(4)}(x) - 2\alpha^2 y''(x) + \alpha^4 y(x) = 0$ si, et seulement si, elle appartient au noyau de $(D^2 - \alpha^2 Id)^2$. D'où :

$$f : x \mapsto Ae^{\alpha x} + Bxe^{\alpha x} + Ce^{-x} + Dxe^{-x},$$

où A, B, C, D sont des constantes réelles.

7. (a) Une solution polynomiale f_0 de $\mathcal{E}$, s'il existe, serait de degré 3. Posons donc $f_0(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, on trouve $f_0 = x^3 + 2$.
- (b) Une application f est solution de l'équation différentielle $\mathcal{E}$ si, et seulement si, $f - f_0$ est solution de $y^{(4)}(x) - 2\alpha^2 y''(x) + \alpha^4 y(x) = 0$, c'est-à-dire $f - f_0 \in \ker(D^2 - \alpha^2 Id)^2$, donc $(f - f_0)(x) = Ae^{\alpha x} + Bxe^{\alpha x} + Ce^{-x} + Dxe^{-x}$, ou encore

$$f(x) = x^3 + 2 + Ae^{\alpha x} + Bxe^{\alpha x} + Ce^{-x} + Dxe^{-x},$$

où A, B, C, D sont des constantes réelles.

• • • • •