Devoir surveillé $n^\circ 02$
Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

•••••••••

Exercice I

Exercice II

1. Puisque E est de dimension finie, on en déduit que l'application linéaire I est continue.

2. On sait que $\forall P \in E,\ P(X) = \sum_{j=0}^{n} P(a_j) l_j(X)$, en particulier, $\forall i \in [\![0,n]\!],\ P(b_i) = \sum_{j=0}^{n} P(a_j) l_j(b_i)$ et donc

$$|P(b_i)| \leq \left(\sum_{j=0}^{n} |l_j(b_i)|\right) N_a(P) \leq \max_{0\leq k\leq n}\left(\sum_{j=0}^{n} |l_j(b_k)|\right) N_a(P).$$

D'où :

$$\forall P \in E,\ \ N_b(P) \leq M N_a(P)$$

où $M = \max\limits_{0\leq k\leq n}\left(\sum\limits_{j=0}^{n} |l_j(b_k)|\right)$. Ceci montre, en particulier, que $|\!|\!| I |\!|\!| \leq M$.

Soit k_0 tel que $\max\limits_{0\leq k\leq n}\left(\sum\limits_{j=0}^{n} |l_j(b_k)|\right) = \left(\sum\limits_{j=0}^{n} |l_j(b_{k_0})|\right)$. On définit alors λ_j pour tout $j \in [\![0,n]\!]$, par :

$$\lambda_j = \begin{cases} 1 & \text{si } l_j(b_{k_0}) > 0 \\ 0 & \text{si } l_j(b_{k_0}) = 0 \\ -1 & \text{si } l_j(b_{k_0}) < 0 \end{cases}$$

puis on pose $P(X) = \sum\limits_{j=0}^{n} \lambda_j l_j(X)$. Donc $P(b_{k_0}) = \sum\limits_{j=0}^{n} |l_j(b_{k_0})|$ et $N_a(P) = \max\limits_{0\leq j\leq n} |\lambda_j| \leq 1$. D'où :

$$\begin{aligned} \max_{0\leq i\leq n} \sum_{j=0}^{n} |l_j(b_i)| &= \sum_{j=0}^{n} |l_j(b_{k_0})| = P(b_{k_0}) \\ &\leq |\!|\!| I |\!|\!| N_a(P) \\ &\leq |\!|\!| I |\!|\!| \end{aligned}$$

et par conséquent $|\!|\!| I |\!|\!| = \max\limits_{0\leq i\leq n} \sum\limits_{j=0}^{n} \prod\limits_{k\neq l} \left|\dfrac{b_i - a_k}{a_j - a_k}\right|$.

3. Remarquons que dans ce cas, pour tout $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$, on a :

$$\begin{aligned} l_j(-1-i) &= \prod_{k\neq j}\left(\frac{-i-1-k}{j-k}\right) \\ &= \frac{(-1)^n (i+1)\ldots(n+i+1)}{(i+j+1)j(j-1)\ldots 1.(-1)(-2)\ldots(j-n)} \\ &= \frac{(-1)^j}{i+j+1}\frac{(n+i+1)!}{i!}\frac{1}{j!(n-j)!} \\ &= \frac{(-1)^j (n+1)}{i+j+1} \mathbb{C}_{n+i+1}^{n+1} \mathbb{C}_n^j \end{aligned}$$

Par conséquent, $\forall i \in [\![0,n]\!]$:

$$\begin{aligned}\Delta_i &= \sum_{j=0}^{n} |l_j(-1-i)| \\ &= (n+1)\mathsf{C}_{n+i+1}^{n+1} \sum_{j=0}^{n} \frac{\mathsf{C}_n^j}{i+j+1} \\ &= \frac{(i+1)...(n+i+1)}{n!} \sum_{j=0}^{n} \frac{\mathsf{C}_n^j}{i+j+1}\end{aligned}$$

On remarque que $(\Delta_i)_{0\leq i\leq n}$ est croissante, en effet, on a :

$$\begin{aligned}\Delta_{i+1}-\Delta_i &= \frac{(i+2)...(n+i+2)}{n!} \sum_{j=0}^{n} \frac{\mathsf{C}_n^j}{i+j+2} - \frac{(i+1)...(n+i+1)}{n!} \sum_{j=0}^{n} \frac{\mathsf{C}_n^j}{i+j+1} \\ &= \frac{(i+2)...(n+i+1)}{n!} \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{n+i+2}{i+j+2} - \frac{i+1}{i+j+1}\right) \mathsf{C}_n^j \\ &= \frac{(i+2)...(n+i+1)}{n!} \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{n(i+j+1)+j}{(i+j+2)(i+j+1)}\right) \mathsf{C}_n^j \geq 0\end{aligned}$$

D'où $\|I\| = \max\limits_{0\leq i\leq n} \Delta_i = \Delta_n = \dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2} \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{\mathsf{C}_n^j}{i+j+1}$. Dans le cas de $n=2$, on trouve $\|I\| = 31$.

4. On a $\Delta_n = \dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2} \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \mathsf{C}_n^j \int_0^1 x^{n+j}\mathrm{d}x = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \int_0^1 x^n \sum_{j=0}^{n} \mathsf{C}_n^j x^j \mathrm{d}x = \mathsf{C}_{2n+1}^n I_n$ où

$$I_n = (n+1)\int_0^1 x^n(1+x)^n \mathrm{d}x.$$

Avec le changement de variable $v = x(1+x)$, c'est-à-dire $x = \dfrac{\sqrt{4v+1}-1}{2}$, on a $I_n = \displaystyle\int_0^2 \frac{(n+1)v^n}{\sqrt{4v+1}}\mathrm{d}v$, puis par intégration par parties, on trouve :

$$\begin{aligned}I_n &= \left[\frac{v^{n+1}}{\sqrt{4v+1}}\right]_0^2 + 2\int_0^2 \frac{v^{n+1}}{(4v+1)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}v \\ &= \frac{2^{n+1}}{3} + 2\int_0^2 \frac{v^{n+1}}{(4v+1)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}v\end{aligned}$$

De plus, $0 \leq \displaystyle\int_0^2 \frac{v^{n+1}}{(4v+1)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}v \leq \int_0^2 v^{n+1}\mathrm{d}v = \frac{2^{n+2}}{n+2}$ et donc $I_n \sim \dfrac{2^{n+1}}{3}$. Ainsi, à l'aide de la formule de Stirling [1],

$$\Delta_n \sim \frac{2}{3}2^n\mathsf{C}_{2n+1}^n \sim \frac{4}{3\sqrt{\pi}}\frac{2^{3n}}{\sqrt{n}}.$$

Exercice III

1.

2.

1. La formule de Stirling $n! \sim \sqrt{2\pi n}e^{-n}n^n$

3. Soient P et Q des polynômes de degrés respectifs d et r, tels que $P=\sum_{i=0}^{d}a_iX^i$ et $Q=\sum_{j=0}^{r}a_jX^j$. On alors :

$$\begin{aligned}
|b_c(P,Q)| &= |P(c)||Q(c)| \\
&= \left|\sum_{i=0}^{d}a_ic^i\right|\left|\sum_{j=0}^{r}b_jc^j\right| \\
&\leq \left(\sum_{i=0}^{d}|a^i||c|^i\right)\left(\sum_{j=0}^{r}|b_j||c|^j\right) \\
&\leq \|P\|\|Q\|\left(\sum_{i=0}^{d}|c|^i\right)\left(\sum_{j=0}^{r}|c|^j\right) \\
&\leq \|P\|\|Q\|\frac{1-|c|^{d+1}}{1-|c|}\frac{1-|c|^{r+1}}{1-|c|}
\end{aligned}$$

Puis comme $|c|<1$, alors pour tout couple $(P,Q)\in E\times E$, on a :

$$|b_c(P,Q)|\leq\left(\frac{1}{1-|c|}\right)^2\|P\|\|Q\|.$$

On en déduit que b_c est continue et que $\|\!|b_c|\!\|\leq\left(\frac{1}{1-|c|}\right)^2$.

Pour montrer l'égalité dans l'autre sens, on considère, pour tout entier $n\geq 1$, le polynôme P définie par $P_n=1+X+...+X^n$, donc on a :

$$b_c(P_n,P_n)=\left(\sum_{k=0}^{n}c^k\right)^2=\left(\frac{1-c^{n+1}}{1-c}\right)^2$$

puis comme $|b_c(P_n,P_n)|\leq\|\!|b_c|\!\|\|P_n\|^2$ et comme $\|P_n\|=1$, alors pour tout entier $n\geq 1$, on a :

$$\left(\frac{1-c^{n+1}}{1-c}\right)^2\leq\|\!|b_c|\!\|.$$

Donc en faisant tendre n vers l'infini, on aura pour $c\in[0,1[$,

$$\left(\frac{1}{1-c}\right)^2\leq\|\!|b_c|\!\|.$$

En considérant maintenant le polynôme Q_n défini pour tout $n\geq 1$, par $Q_n=1-X+X^2...+(-1)^nX^n$. On montre de la même manière que pour $c\in]-1,0]$, on a :

$$\left(\frac{1}{1+c}\right)^2\leq\|\!|b_c|\!\|.$$

Donc finalement, on a :

$$\leq\|\!|b_c|\!\|=\left(\frac{1}{1-|c|}\right)^2.$$

●●●●●●●●●●