

Devoir surveillé n°03

Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

• • • • •

Exercice I

1. On rappelle que $\forall x \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{Z}, E(x+n) = E(x) + n$ et $\forall x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}, E(-x) = -E(x) - 1$.
- En effet, $E(x) \leq x < E(x) + 1 \Rightarrow E(x) + n \leq x + n < E(x) + n + 1$, d'où $E(x+n) = E(x) + n$.
 - Si $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}, E(x) \leq x < E(x) + 1 \Rightarrow -E(x) - 1 < -x \leq -E(x)$, donc $-E(x) - 1 < -x < -E(x)$ car $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$, d'où $E(-x) = -E(x) - 1$.
- On a alors :

$$\begin{aligned} f(x+1) &= E\left(\frac{x+1}{2}\right) + E\left(\frac{x+2}{2}\right) - E(x+1) \\ &= E\left(\frac{x+1}{2}\right) + E\left(\frac{x}{2} + 1\right) - E(x) - 1 \\ &= E\left(\frac{x+1}{2}\right) + E\left(\frac{x}{2}\right) + 1 - E(x) - 1 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Donc f est 1-périodique.

2. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on $f(x+1) = f(x)$, donc on peut montrer par récurrence sur $k \in \mathbf{Z}$ que $\forall x \in \mathbf{R}, f(x-k) = f(x)$.
Soit donc $x \in \mathbf{R}$ et $k = E(x)$, alors on a $f(x - E(x)) = f(x)$, puis d'autre part on a :

$$f(x - E(x)) = E\left(\frac{x - E(x)}{2}\right) + E\left(\frac{x - E(x) + 1}{2}\right) - E(x - E(x))$$

Comme $0 \leq x - E(x) < 1$, on a $0 \leq \frac{x - E(x)}{2} < \frac{1}{2} < 1$ et $\frac{1}{2} \leq \frac{x - E(x) + 1}{2} < 1$. Ainsi, on en déduit que $f(x - E(x)) = 0$, donc $f(x) = 0$.

3. D'après la question 2., $\forall x \in \mathbf{R}$, on a $E\left(\frac{x}{2}\right) + E\left(\frac{x+1}{2}\right) = E(x)$ et donc $E\left(\frac{\frac{x}{2}}{2}\right) + E\left(\frac{\frac{x}{2}+1}{2}\right) = E\left(\frac{x}{2}\right)$,
c'est-à-dire $E\left(\frac{x}{2^2}\right) + E\left(\frac{x+2}{2^2}\right) = E\left(\frac{x}{2}\right)$, puis on vérifie par récurrence que

$$\forall k \in \mathbf{N}, E\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) + E\left(\frac{x+2^k}{2^{k+1}}\right) = E\left(\frac{x}{2^k}\right).$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbf{R}$ et $\forall k \in \mathbf{N}$, on a :

$$E\left(\frac{x+2^k}{2^{k+1}}\right) = E\left(\frac{x}{2^k}\right) - E\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)$$

On en déduit que $S_n = \sum_{k=0}^n E\left(\frac{x+2^k}{2^{k+1}}\right) = \sum_{k=0}^n \left(E\left(\frac{x}{2^k}\right) - E\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\right) = E(x) - E\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$.

Ceci montre que, $\forall x \in \mathbf{R}$, la série de général $u_n(x)$ est convergente et que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} E\left(\frac{x+2^n}{2^{n+1}}\right) = E(x)$.

Exercice II

1. Soit λ un élément de $\mathbf{R}^{+*}$. Une simple intégration par parties donne :

$$I(\lambda) = \int_a^b f(t) \sin \lambda t dt = \left[f(t) \left(-\frac{\cos \lambda t}{\lambda} \right) \right]_a^b - \int_a^b f'(t) \left(-\frac{\cos \lambda t}{\lambda} \right) dt.$$

Donc

$$|I(\lambda)| \leq \frac{2M}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \left| \int_a^b f'(t) \cos \lambda t dt \right| \leq \frac{2M}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_a^b |f'(t)| dt.$$

où $M = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$. Par encadrement il vient sans difficulté

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} I(\lambda) = 0.$$

De même, $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} J(\lambda) = 0$.

2. On trouve $u = -1$ et $v = \frac{1}{2\pi}$.

3. On a, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\int_0^\pi \left(-x + \frac{x^2}{2\pi} \right) \cos(nx) dx = \frac{1}{n^2}$. Grâce à la linéarité de l'intégrale, on obtient :

$$\sum_{k=1}^n \int_0^\pi \left(-x + \frac{x^2}{2\pi} \right) \cos(kx) dx = \int_0^\pi \left(-x + \frac{x^2}{2\pi} \right) c_n(x) dx = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2}$$

où $c_n(x) = \sum_{k=1}^n \cos(kx)$.

Si $x \in]0, \pi]$, alors $e^{ix} \neq 1$ et par conséquent :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n e^{ikx} &= e^{ix} \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} \\ &= e^{ix} \frac{e^{\frac{inx}{2}} e^{-\frac{inx}{2}} - e^{\frac{inx}{2}} e^{-\frac{inx}{2}}}{e^{\frac{ix}{2}} e^{-\frac{ix}{2}} - e^{\frac{ix}{2}} e^{-\frac{ix}{2}}} = e^{i(n+1)\frac{x}{2}} \frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \left(\frac{x}{2} \right)}, \end{aligned}$$

et

$$c_n(x) = \sum_{k=1}^n \cos(kx) = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^n e^{ikx} \right) = \frac{\cos(n+1)\frac{x}{2} \sin \frac{nx}{2}}{\sin \left(\frac{x}{2} \right)} = -\frac{1}{2} + \frac{\sin(2n+1)\frac{x}{2}}{\sin \left(\frac{x}{2} \right)}.$$

Pour $x = 0$, comme $\cos(kx) = 1$ pour tout entier naturel, on obtient $c_n(x) = n$.

D'après ce qui précède, on peut écrire $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \sum_{k=1}^n \cos(kt) dt$, donc

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2} = \int_0^\pi \left(x - \frac{x^2}{2\pi} \right) \left[\frac{-1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin(2n+1)\frac{x}{2}}{\sin \left(\frac{x}{2} \right)} \right] dx = \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(x - \frac{x^2}{2\pi} \right) \frac{\sin(2n+1)\frac{x}{2}}{\sin \left(\frac{x}{2} \right)} dx.$$

Il est clair que $f : x \mapsto \left(x - \frac{x^2}{2\pi} \right) \frac{1}{\sin \left(\frac{x}{2} \right)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi]$ et que $\forall x \in]0, \pi]$,

$$f'(x) = \frac{\left(1 - \frac{x}{\pi} \right) \sin \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^2}{2\pi} \right) \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}}.$$

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2$, donc f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \frac{-1}{\pi}$, donc f est dérivable en 0, donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$, d'après le théorème du prolongement de la dérivée.

On obtient, en utilisant le résultat précédent (lemme de Riemann),

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} f(x) \sin \frac{(2n+1)x}{2} dx = \frac{\pi^2}{6}.$$

4. (a) Soit $n \in \mathbf{N}$ et $k \in \mathbf{N}$, alors on a :

$$\begin{aligned} E(\sqrt{n}) = k &\Leftrightarrow k \leq \sqrt{n} < k+1 \\ &\Leftrightarrow k^2 \leq n < k^2 + 2k + 1 \\ &\Leftrightarrow k^2 \leq n \leq k^2 + k \end{aligned}$$

Donc k divise n si et seulement si il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que $n = pk$ et donc $k^2 \leq kp \leq k^2 + 2k$ ou encore $k \leq p \leq k+2$.

(b) Dans $\mathbf{R}^+ \cup \{+8\}$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n \in I} \frac{1}{n} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{k(k+2)} \right) \\ &= \frac{\pi^2}{6} + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left[\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \right] \\ &= \frac{\pi^2}{6} + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \frac{\pi^2}{6} + 1 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{\pi^2}{6} + \frac{7}{4} \end{aligned}$$

Exercice III

1. Si $x = 1$, $f_n(1) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{1-n+n^2}}$ et la série de terme général $\frac{(-1)^n}{\sqrt{1-n+n^2}}$ converge d'après le critère spécial des séries alternées.

Si $x \in [0, 1[$, on a, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|f_n(x)| = \frac{x^n}{\sqrt{1-n+n^2}} \leq x^n$, donc la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbf{N}} f_n$ converge simplement sur $[0, 1[$ et converge normalement sur tout segment $[0, a]$ où $a \in]0, 1[$. Comme les f_n sont continues sur $[0, 1]$, alors la fonction somme F est continue sur $[0, 1[$.

On a :

$$\int_0^1 |f_n(x)| dx = \frac{1}{\sqrt{1-n+n^2}} \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{(n+1)\sqrt{1-n+n^2}}.$$

Puisque $\frac{1}{(n+1)\sqrt{1-n+n^2}} \sim \frac{1}{n^2}$, la série des intégrales $\sum_{n \in \mathbf{N}} \int_0^1 |f_n(x)| dx$ converge.

2. La série de terme général $\int_0^1 |f_n(x)| dx$ et F est continue sur $[0, 1[$, on peut donc appliquer le théorème d'intégration terme à terme sur $[0, 1[$ et l'on obtient

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{\sqrt{1-n+n^2}} \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{1-n+n^2}} \int_0^1 x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+n)\sqrt{1-n+n^2}}.$$

3. Puisque $|f_n(1)| = \frac{1}{\sqrt{1-n+n^2}} \sim \frac{1}{n}$, la série $\sum_{n \in \mathbf{N}} |f_n(1)|$ est donc divergente.

On sait que, d'après ce qui précède que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge normalement et donc uniformément sur tout segment $[0, a]$ de $[0, 1[$.

La série de terme général $\int_0^1 |f_n(x)| dx$ converge, donc le résultat se déduit du théorème d'intégration terme à terme cas des fonctions positives.

Exercice IV

1. Pour tout $x > 0$ fixé, l'application $t \mapsto \frac{t \sin t}{(t^2 + x^2)^n}$ est continue sur $[0, +\infty[$. De plus, pour tout $x \in [a, +\infty[$, tout $t \in]0, +\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on a l'égalité :

$$\left| \frac{t \sin t}{(t^2 + x^2)^n} \right| \leq \frac{t}{(t^2 + x^2)^n} \leq \frac{1}{t^{2n-1}}.$$

Comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2n-1}}$ est convergente pour $n > 1$, on en déduit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t \sin t}{(t^2 + x^2)^n} dt$ est absolument convergente.

D'autre part, $\forall (x, t) \in [a, +\infty[\times]0, \infty[$, $\left| \frac{t \sin t}{(t^2 + x^2)^n} \right| \leq \frac{t}{(t^2 + x^2)^n} \leq \frac{t}{(t^2 + a^2)^n}$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t}{(t^2 + a^2)^n} dt$ converge. D'après le théorème de continuité des fonctions définies par des intégrales, la fonction J_n est continue sur $[a, +\infty[$.

2. Soit $T > 0$. Par une intégration par parties, on obtient :

$$\int_0^T \frac{t \sin t}{t^2 + x^2} dt = \left[\frac{-t \cos t}{t^2 + x^2} \right]_0^T + \int_0^T \frac{x^2 - t^2}{(t^2 + x^2)^2} \cos t dt.$$

On peut vérifier comme dans la question précédente que $\forall x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{x^2 - t^2}{(t^2 + x^2)} \cos t$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. On en déduit que $J_1(x)$ existe et que

$$J_1(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x^2 - t^2}{(t^2 + x^2)^2} \cos t dt.$$

Or

$$\frac{x^2 - t^2}{(x^2 + t^2)^2} = \frac{1}{t^2 + x^2} - \frac{2t^2}{(t^2 + x^2)^2}$$

et par suite

$$\left| \frac{x^2 - t^2}{(t^2 + x^2)} \cos t \right| \leq \frac{1}{t^2 + x^2} + \frac{2t^2}{(t^2 + x^2)^2} \leq \frac{1}{t^2 + a^2} + \frac{2}{t^2 + a^2} = \frac{3}{t^2 + a^2}.$$

On en déduit comme précédemment que l'application $x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{x^2 - t^2}{(t^2 + x^2)} \cos t dt$ est continue sur $[a, +\infty[$. La fonction J_1 est donc définie et continue sur $[a, +\infty[$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{t \sin t}{(t^2 + x^2)^n} \right) (t, x) = \frac{-2nxt \sin t}{(t^2 + x^2)^{n+1}}.$$

De plus, pour $x \geq a$, on a les inégalités :

$$\left| \frac{2nxt \sin t}{(t^2 + x^2)^{n+1}} \right| \leq \frac{2nxt}{(t^2 + x^2)^{n+1}} = \frac{2n}{(t^2 + x^2)^n} \frac{t}{\sqrt{t^2 + x^2}} \frac{x}{\sqrt{t^2 + x^2}} \leq \frac{2n}{(t^2 + a^2)^n}$$

Comme pour $n \in \mathbb{N}^*$ l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2 + a^2)^n}$ est convergente, alors d'après le théorème de dérivation sous-signé intégrale, la fonction J_n est $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ et

$$J'_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-2nxt \sin t}{(t^2 + x^2)^{n+1}} dt = -2nxJ_{n+1}(x)$$

Comme J_{n+1} est dérivable, J'_n est aussi dérivable et $J''_n(x)$ s'exprime en fonction de x , $J_{n+1}(x)$ et $J_{n+2}(x)$. On montre par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$ que $J_n^{(p)}$ existe et s'exprime en fonction de x , $J_{n+1}(x)$, ..., $J_{n+p}(x)$ et par suite que J_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a, +\infty[$.

4. Posons $\varphi(t) = \frac{t}{(t^2 + x^2)^n}$. On a $\varphi'(t) = \frac{1}{(t^2 + x^2)^n} - \frac{2nt^2}{(t^2 + x^2)^{n+1}}$ et

$$\begin{aligned} \varphi''(t) &= \frac{-2nt}{(t^2 + x^2)^{n+1}} - \frac{4nt}{(t^2 + x^2)^{n+1}} + \frac{4n(n+1)t^3}{(t^2 + x^2)^{n+2}} \\ &= \frac{-6nt}{(t^2 + x^2)^{n+1}} + \frac{4n(n+1)t^3}{(t^2 + x^2)^{n+2}}. \end{aligned}$$

On obtient donc par intégration par parties successives :

$$\begin{aligned} J_n(x) &= [-\varphi(t) \cos t]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \varphi'(t) \cos t dt = \int_0^{+\infty} \varphi'(t) \cos t dt \\ &= [\varphi'(t) \sin t]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \varphi''(t) \sin t dt = - \int_0^{+\infty} \varphi''(t) \sin t dt \\ &= \int_0^{+\infty} \left[\frac{6nt}{(t^2 + x^2)^{n+1}} - \frac{4n(n+1)t^3}{(t^2 + x^2)^{n+2}} \right] \sin t dt \end{aligned}$$

Comme $t^3 = t(t^2 + x^2) - tx^2$, il vient :

$$J_n(x) = 6nJ_{n+1}(x) - 4n(n+1)J_{n+1}(x) + 4n(n+1)x^2J_{n+2}(x)$$

ou encore

$$J_n(x) + 2n(2n-1)J_{n+1}(x) - 4n(n+1)x^2J_{n+2}(x) = 0 \quad (1)$$

D'autre part, on a :

$$J'_n(x) = -2nxJ_{n+1}(x)$$

et par suite

$$J''_n(x) = -2nJ_{n+1}(x) - 2nxJ'_{n+1}(x) = -2nJ_{n+1}(x) + 4n(n+1)x^2J_{n+2}(x)$$

d'où

$$J_{n+1}(x) = \frac{-1}{2nx} J'_n(x)$$

et

$$J_{n+2}(x) = \frac{1}{4n(n+1)x^2} \left(J''_n(x) - \frac{1}{x} J'_n(x) \right).$$

En remplaçant dans la relation (1) $J_{n+1}(x)$ et $J_{n+2}(x)$ par leurs valeurs en fonction de $J'_n(x)$ et $J''_n(x)$ on obtient l'égalité demandée :

$$xJ''_n(x) + 2(n-1)J'_n(x) - xJ_n(x) = 0.$$

• • • • •