

Devoir surveillé n°04

Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

• • • • •

Problème I

Partie I

- (a) D'après la règle de D'Alembert, $R = 1$.
 (b) Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\left| \frac{x^n}{n(n-1)} \right| \leq \frac{1}{n(n-1)}$ et la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$ converge. Donc $\sum_{n \geq 2} \frac{x^n}{n(n-1)}$ converge simplement sur $[-1, 1]$, en particulier en 1 et -1 .
- f est une fonction définie par une série entière de rayon de convergence $R = 1$, donc f est indéfiniment dérivable sur $] -1, 1[$. L'inégalité $x \in [-1, 1]$, $\left| \frac{x^n}{n(n-1)} \right| \leq \frac{1}{n(n-1)}$, montre que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{x^n}{n(n-1)}$ converge uniformément sur $[-1, 1]$ et comme les fonctions $x \mapsto \frac{x^n}{n(n-1)}$ sont continues alors f est continue sur $[-1, 1]$.
- Par dérivation terme à terme, on obtient $\forall x \in] -1, 1[$, $f'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1}$ et $f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} x^{n-2}$. Donc $\forall x \in] -1, 1[$, $f''(x) = \frac{1}{1-x}$ et puis $f'(x) = -\ln(1-x) + c$, comme $f'(0) = 0$ alors $f'(x) = -\ln(1-x)$. Finalement, $f(x) = -\int \ln(1-x) dx = (1-x) \ln(1-x) + x + \mu$. Mais $f(0) = 0$, donc $f(x) = (1-x) \ln(1-x) + x$.
- f étant continue sur $[-1, 1]$ et coïncide avec $x \mapsto (1-x) \ln(1-x) + x$, d'où :

$$S_1 = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1, x < 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1, x < 1} (1-x) \ln(1-x) + x = 1.$$

De même,

$$S_2 = f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1, x > -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1, x > -1} (1-x) \ln(1-x) + x = 2 \ln 2 - 1.$$

Partie II

- (a) $R = 1$ d'après la règle de D'Alembert.
 (b) La série diverge pour $x = 1$ et pour $x = -1$, la série converge d'après le critère spécial des séries alternées.
- (a) g est une fonction de la variable t définie par une série entière de rayon de convergence 1, donc elle est dérivable en particulier sur $]0, 1[$ et $g'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} t^{4n-2}$. Ainsi,

$$\forall t \in]0, 1[, \quad g'(t) = \frac{1}{t^2} \sum_{n=1}^{\infty} (t^4)^n = \frac{1}{t^2} \left(\frac{1}{1-t^4} - 1 \right) = \frac{t^2}{1-t^4}$$

Donc $a = 1$ et $b = 0$.

- (b) Par décomposition en éléments simples, $g'(t) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) - \frac{1}{2} \frac{1}{1+t^2}$, d'où

$$g(t) = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{1+t}{1-t} \right) - \frac{1}{2} \arctan(t) + \lambda$$

où λ est une constante. Comme $g(0) = 0$, alors $\lambda = 0$.

(c) Pour $x \in]0, 1[$, on a $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{4n-1} = -1 + \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{4n-1}}{4n-1} = -1 + \frac{1}{t} g(t) = -1 + \frac{1}{\sqrt[4]{x}} g(\sqrt[4]{x})$. D'où :

$$\forall x \in]0, 1[, \quad f(x) = -1 + \frac{1}{4\sqrt[4]{x}} \ln \left(\frac{1 + \sqrt[4]{x}}{1 - \sqrt[4]{x}} \right) - \frac{1}{2\sqrt[4]{x}} \arctan(\sqrt[4]{x}).$$

3. Pour $x \in]-1, 0[$, on pose $x = -t^4$ où $t \in]0, 1[$ et $h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{4n-1}}{4n-1}$. Comme précédemment, h est dérivable sur $]0, 1[$ et

$$\forall t \in]0, 1[, \quad h'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n t^{4n-2} = \frac{1}{t^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-t^4)^n = -\frac{t^2}{1+t^4} = \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\frac{t}{t^2 + t\sqrt{2} + 1} - \frac{t}{t^2 - t\sqrt{2} + 1} \right).$$

D'où,

$$h(t) = - \int \frac{t^2}{1+t^4} dt = \frac{\sqrt{2}}{8} \ln \left(\frac{t^2 + t\sqrt{2} + 1}{t^2 - t\sqrt{2} + 1} \right) - \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan(t\sqrt{2} + 1) - \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan(t\sqrt{2} - 1) + \mu$$

où μ est une constante. Comme $h(0) = 0$, alors $\mu = 0$.

Pour $x \in]0, 1[$, on a :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{4n-1} = -1 + \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{4n-1}}{4n-1} = -1 + \frac{1}{t} h(t) = -1 + \frac{1}{\sqrt[4]{-x}} h(\sqrt[4]{-x}).$$

4. (a) Il est clair que f est continue sur $] -1, 1[$ comme fonction définie par une série entière. D'autre part, si $x \in [-1, 0[$, on pose $x = -t$, donc la série en question s'écrit $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n t^n}{4n-1}$. Donc pour $t \in]0, 1[$ la série est alternée et convergente, de plus on a l'inégalité :

$$\forall t \in [-1, 0[, \quad \left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{4k-1} \right| \leq \frac{|t|^{n+1}}{4n+3} \leq \frac{1}{4n+3}$$

Donc on a la convergence uniforme sur $[-1, 0[$, donc f est continue sur $[-1, 0[$.

(b) En utilisant la continuité de f au point $x = -1$, on obtient :

$$\begin{aligned} S_3 &= f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1, x > -1} f(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow -1, x > -1} \left[-1 + \frac{1}{\sqrt[4]{-x}} h(\sqrt[4]{-x}) \right] \\ &= -1 - \frac{\sqrt{2}}{8} \ln \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \right) + \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan(\sqrt{2} + 1) - \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan(\sqrt{2} - 1) \\ &= -1 - \frac{\sqrt{2}}{8} \ln \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \right) + \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan(\sqrt{2} + 1) - \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{2} + 1} \right) \\ &= -1 - \frac{\sqrt{2}}{8} \ln \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \right) + \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan(\sqrt{2} + 1) - \frac{\sqrt{2}}{4} \left[\frac{\pi}{2} - \arctan(\sqrt{2} + 1) \right] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{8} \ln \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \right) - \frac{8 + \pi\sqrt{2}}{8}. \end{aligned}$$

Problème II

Partie I

1. Pour tout $s \in [-1, 1]$ et tout $k \in \mathbb{N}$, on a $|p_k s^k| \leq p_k$. La série de terme $\sum_{k \in \mathbb{N}} p_k$ converge, et sa somme vaut 1.

Le théorème de comparaison des séries à termes positifs nous permet d'affirmer que la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} p_k s^k$ converge absolument.

2. (a) Par définition $g(0) = p_0$ ($0^0 = 1$) et $g(1) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$ (il s'agit d'une loi de probabilité).

(b) Si X est une variable de Bernoulli, alors $\forall s \in \mathbb{R}$, $g_X(s) = 1 - p + ps$.

(c) Pour tout $s \in [-1, 1]$, on a $g_Y(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} s^k = e^{-\lambda} e^{\lambda s} = e^{\lambda(s-1)}$.

3. Pour tout $s \in [-1, 1] \setminus \{0\}$, on a $|v_k| = |k p_k s^{k-1}| \leq \frac{1}{|s|} p_k |s|^k$ et la série $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} p_k |s|^k$ converge. Donc $\sum_{k \in \mathbb{N}} v_k$ converge absolument. La série $\sum_{k \in \mathbb{N}} v_k$ converge absolument pour $s = 0$.

De même, si $s \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ on a $|w_k| = |k(k-1)p_k s^{k-2}| \leq \frac{1}{|s|^2} p_k |s|^k$ et la série $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} p_k |s|^k$ converge. Donc

$\sum_{k \in \mathbb{N}} w_k$ converge absolument. La série $\sum_{k \in \mathbb{N}} w_k$ converge absolument pour $s = 0$.

4. On a $g'(1) = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = E(X)$ et $g''(1) + g'(1) - g'(1)^2 = V(X)$.

Pour la loi de Bernoulli, on a $G_X(s) = 1 - p + ps$, $G'_X(s) = p$ et $G''_X(s) = 0$. D'où $E(X) = p$ et $V(X) = p - p^2 = p(1 - p)$.

5. Soit $k \in \mathbb{N}$, on a $(Z = k) = \bigcup_{i=0}^k (X = i, Y = k - i)$ (réunion disjointe). D'où :

$$\begin{aligned} p(Z = k) &= \sum_{i=0}^k p(X = i, Y = k - i) \\ &= \sum_{i=0}^k p(X = i) p(Y = k - i) \quad (X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes}) \end{aligned}$$

Donc, pour $s \in [-1, 1]$, on obtient :

$$\begin{aligned} h(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} p(Z = k) s^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^k p(X = i) p(Y = k - i) \right) s^k \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} p(X = i) s^i \sum_{k=i}^{\infty} p(Y = k - i) s^{k-i} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} p(X = i) s^i \sum_{l=0}^{\infty} p(Y = l) s^l \\ &= f(s) \times g(s) \end{aligned}$$

6. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note G_{Z_n} la fonction génératrice de Z_n . Montrons que $G_{Z_n} = g^n$. En effet, d'après ce qui précède, la propriété est vraie pour $n = 2$. Supposons la vraie pour n . On a alors, pour tout $s \in [-1, 1]$:

$$G_{Z_{n+1}}(s) = G_{Z_n + X_{n+1}}(s) = G_{Z_n}(s) \times g(s) = g^n(s) \times g(s) = g^{n+1}(s).$$

Et la propriété est vraie pour $n + 1$. La propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p , alors X peut être considérée comme somme de n variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ de Bernoulli et indépendantes. D'où, d'après ce qui précède, pour tout $s \in \mathbf{R}$,

$$g(s) = f^n(s) = (1 - p + sp)^n.$$

Partie II

1. (a) Par définition, $\forall s \in [-1, 1]$, $g(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p(\xi_1 = k) s^k$. Donc $|g(s)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} p(\xi_1 = k) |s|^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} p(\xi_1 = k) = 1$.

D'où $g(s) \in [-1, 1]$.

- (b) X_1 et ξ_1 ont même loi, donc même fonction génératrice. D'où $g_1 = g$.

- (c) Notons $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$. D'après ce qui précède, la fonction génératrice de S_n est g^n . On remarque que $X_{n+1} =$

$$\sum_{i=1}^j \xi_i = \sum_{i=1}^{X_n} \xi_i = S_{X_n}. \text{ Soit maintenant } k \in X_{n+1}(\Omega), \text{ on a :}$$

$$\begin{aligned} p(X_{n+1} = k) &= \sum_{j \in X_n(\Omega)} p(S_{X_n} = k, X_n = j) \\ &= \sum_{j \in X_n(\Omega)} p(S_{X_n} = k / X_n = j) p(X_n = j) \\ &= \sum_{j \in X_n(\Omega)} p(S_j = k) p(X_n = j) \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} g_{n+1}(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j \in X_n(\Omega)} p(S_j = k) p(X_n = j) \right) s^k \\ &= \sum_{j \in X_n(\Omega)} p(X_n = j) \left(\sum_{k=0}^{\infty} p(S_j = k) s^k \right) \\ &= \sum_{j \in X_n(\Omega)} p(X_n = j) (g(s))^j \\ &= g_n(g(s)) \\ &= g^{(n+1)}(s) \end{aligned}$$

Donc on peut conclure par le principe de récurrence.

2. • Montrons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$ que $E(X_n) = m^n$. La propriété est vraie pour $n = 1$ puisque $E(X_1) = E(\xi_1) = m$. Supposons la propriété vraie à l'ordre n . On a :

$$E(X_{n+1}) = g'_{(n+1)}(1) = (g \circ g_n)'(1) = g'(g_n(1)) \times g'_n(1) = E(X_1) \times E(X_n) = m^{n+1}.$$

D'où, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $E(X_n) = m^n$.

• On a $V(X_1) = \sigma^2$. Supposons $V(X_n) = \sigma^2 m^{n-1} (1 + m + \dots + m^{n-1})$ pour $n \in \mathbf{N}^*$ et montrons la propriété pour $n + 1$. En effet, on sait que $V(X_{n+1}) = g''_{n+1}(1) + g'_{n+1}(1) - (g'_{n+1}(1))^2$. D'autre part, pour tout $t \in]-1, 1[$, $g'_{n+1}(t) = g'(g_n(t)) \times g'_n(t)$ et

$$g''_{n+1}(t) = g''(g_n(t)) \times (g'_n(t))^2 + g'(g_n(t)) \times g''_n(t)$$

D'où :

$$\begin{aligned}V(X_{n+1}) &= g''_{n+1}(1) + g'_{n+1}(1) - (g'_{n+1}(1))^2 \\&= g''(1) \times (g'_n(1))^2 + g'(1) \times g''_n(1) + g'_{n+1}(1) - (g'_{n+1}(1))^2 \\&= (\sigma^2 - m + m^2) m^{2n} + m(V(X_n) - m^n + m^{2n}) + m^{n+1} - m^{2(n+1)} \\&= (\sigma^2 - m + m^2) m^{2n} + m(\sigma^2 m^{n-1}(1 + m + \dots + m^{n-1}) - m^n + m^{2n}) + m^{n+1} - m^{2(n+1)} \\&= \sigma^2 m^n (1 + m + \dots + m^{n-1} + m^n).\end{aligned}$$

- On a $V(X_n) = \sigma^2 m^{n-1} \frac{m^n - 1}{m - 1}$. Donc $V(X_n)$ décroît lorsque n croît.

• • • • •