Devoir surveillé $n^\circ 02$
Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

•••••••••

Exercice

1. $\mathscr{C}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$, car c'est le noyau de l'endomorphisme de $\mathscr{L}(E)$ défini par $g \mapsto fg - gf$. Maintenant, si g et h sont deux éléments de $\mathscr{C}(f)$, alors :

$$(gh)f = g(hf) = g(fh) = (gf)h = (fg)h = f(gh).$$

Par suite, $gh \in \mathscr{C}(f)$.

2. Comme $\mathscr{C}(f)$ est stable par combinaison linéaire, alors il suffit de montrer $\forall n \in \mathbf{N}$, f^n commute avec f pour déduire que $P(f) \in \mathscr{C}(f)$ pour tout $P \in \mathbf{K}[X]$. Or, une récurrence, assez simple, nous permet de voir que $f^n f = f f^n$.

3. Montrons que la famille $(x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0))$ est libre. Si, pour des scalaires $(a_0, a_1, ..., a_{n-1}) \in \mathbf{K}^n$, on a :

$$a_0 x_0 + a_1 f(x_0) + ... + a_{n-1} f^{n-1}(x_0) = 0.$$

Alors, en appliquant successivement $f^{n-1}, f^{n-2}, ..., f$ à l'expression ci-dessus, on déduit successivement que $a_0 = a_1 = 0 = ... = a_{n-1} = 0$.
Par conséquent, cette famille est libre, comme elle est composée de $n = \dim(E)$ vecteurs, c'est une base de E. En conclusion, f est un endomorphisme cyclique.

4. On montre ce résultat par double inclusion.
• Soit $g \in \mathscr{C}(f)$, alors comme $(x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0))$ est une base de E, il existe un unique n-uplet $(a_0, a_1, ..., a_{n-1}) \in \mathbf{K}^n$ tel que :

$$g(x_0) = a_0 x_0 + a_1 f(x_0) + ... + a_{n-1} f^{n-1}(x_0).$$

Comme g commute avec f^j, pour $j \in [\![0, n-1]\!]$, alors on déduit que :

$$g(f^j(x_0)) = f^j(g(x_0)) = f^j\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k\right) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^{k-1}\left(f^j(x_0)\right).$$

Les endomorphismes g et $\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$ coïncident sur la base $(x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0))$ de E. Par conséquent, $g = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$ et ainsi $g \in \mathscr{C}(f)$.
• L'autre inclusion résulte immédiatement de la question **2.** ci-dessus.

Problème

Partie A

1. On peut vérifier facilement que f_λ est un endomorphisme de $\mathbf{R}^2$. La matrice canoniquement associée à f_λ s'écrit :

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda - 1 \\ 2 & \lambda - 2 \end{pmatrix}$$

Donc f_λ est bijective si, et seulement si, $\det(A) = -\lambda$ est non nul.

2. Pour $\lambda \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned} f_\lambda(x,y) = (x',y') &\Leftrightarrow x + (\lambda-1)y = x' \text{ et } 2x + (\lambda-2)y = y' \\ &\Leftrightarrow x = \left(\frac{2}{\lambda} - 1\right)x' + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)y' \text{ et } y = \frac{2}{\lambda}x' - \frac{1}{\lambda}y' \end{aligned}$$

Donc f_λ^{-1} est l'application, qui au point M de coordonnées (x,y), fait correspondre le point M' de cordonnées (x',y') telles que

$$\begin{cases} x' &= \left(\frac{2}{\lambda} - 1\right)x - \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)y \\ y' &= \frac{2}{\lambda}x - \frac{1}{\lambda}y \end{cases}$$

3. f_λ involutive est équivalent à $A^2 = I_2$. Or $A^2 = \begin{pmatrix} 1+2(\lambda-1) & (\lambda-1)+(\lambda-1)(\lambda-2) \\ 2+2(\lambda-2) & 2(\lambda-1)+(\lambda-2)^2 \end{pmatrix}$. Donc f_λ est involutive si, et seulement si, $\lambda = 1$.

4. f_1 est une symétrie, c'est la symétrie par rapport à la droite $\ker(f_1 - \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^2}) = \mathrm{Vect}(1,1)$ parallèlement à la droite $\ker(f_1 + \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^2}) = \mathrm{Vect}(0,1)$.

Partie B

1. $M(x,y)$ est un point invariant par f_0 si, et seulement si, $f_0(x,y) = (x,y)$ ou encore $\begin{cases} x - y &= x \\ 2x - 2y &= y \end{cases}$. Donc $(0,0)$ est l'unique point invariant par f_0.

2. On a $\mathrm{Im}(f_0) = \left\{ (x-y, 2(x-y)) \mid (x,y) \in \mathbf{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}(1,2)$, c'est la droite d'équation $\Delta : y - 2x = 0$. De plus, $\forall t \in \mathbf{R}$, $f(t,2t) = (t-2t, 2(t-2t)) = -(t,2t)$, alors la droite Δ est globalement invariants par f_0.

3. Si $M(x,y) \in \Delta$, on a $y = 2x$ et donc $\begin{cases} x' &= x - 2x = -x \\ y' &= 2(x-2x) = -2x = -y \end{cases}$. Donc $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ avec $k = -1$.

4. Si p est une projection et h est une homothétie de rapport α, alors si $f_0 = p \circ h$, on aura $(x-y, 2(x-y)) = p \circ h(x,y) = p(\alpha x, \alpha y) = \alpha p(x,y)$ et donc $p(x,y) = \frac{1}{\alpha}(x-y, 2(x-y))$. On vérifie facilement que $p^2(x,y) = \frac{-1}{\alpha}p(x,y)$, donc l'homothétie de rapport $\alpha = -1$ convient. En conclusion, $f_0 = p \circ h$ avec p la projection définie par $p(x,y) = (y-x, 2(y-x))$ et h l'homothétie de rapport -1.

Partie C

1. (a) Si $(x,y) \in D_\lambda$, on a $f_\lambda(x,y) = (x+(\lambda-1)(x+k), 2x+(\lambda-2)(x+k)) = (\lambda(x+k)-k, \lambda(x+k)-2k) = (x',y')$ avec $y' = x' - k$, donc $f_\lambda(x,y) \in D'_\lambda$. Comme f_λ est bijective, alors $f_\lambda(D_\lambda) = D'_\lambda$.

(b) On vérifie par récurrence que, $\forall p \in \mathbf{N}$, $f_\lambda^{2p}(D_\lambda) = D_\lambda$ et $f_\lambda^{2p+1}(D_\lambda) = D'_\lambda$.

2. (a) On a $A_1 = f_\lambda(A_0) = (1,2)$. Si n est un entier supérieur ou égal à 2, on a :

$$f_\lambda^n(A_0) = f_\lambda\left(f^{n-1}(A_0)\right) = (x_{n-1} + (\lambda-1)y_{n-1}, 2x_{n-1} + (\lambda-2)y_{n-1}).$$

D'où les relations :

$$(S)\ \forall n \geq 2,\ \begin{cases} x_n &= x_{n-1} + (\lambda-1)y_{n-1} \\ y_n &= 2x_{n-1} + (\lambda-2)y_{n-1} \end{cases}$$

On obtient donc $x_n - y_n = -(x_{n-1} - y_{n-1})$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, il s'agit donc d'une suite géométrique de raison -1, d'où $\forall n \in \mathbf{N}$, $x_n - y_n = (x_0 - y_0)(-1)^n = (-1)^n$ et donc $x_n = y_n + (-1)^n$. En remplaçant dans l'une des relations de système (S), on obtient :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \ y_n = \lambda y_{n-1} + 2(-1)^{n-1}.$$

On a $y_1 = 2$ et $y_2 = 2\lambda - 2$ puis, par récurrence, y_n est un polynôme en λ de degré $n-1$.

(b) Si on pose $y_n = 2u_n(\lambda)$, on obtient $u_{n+1}(\lambda) = \lambda u_n(\lambda) + (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

(c) D'après la question précédente, on obtient les relations :

$$\begin{aligned}
u_n(\lambda) &= \lambda\left(\lambda u_{n-2}(\lambda) + (-1)^{n-2}\right) + (-1)^{n-1} \\
&= \lambda^2 u_{n-2}(\lambda) + \lambda(-1)^{n-2} + (-1)^{n-1} \\
&= \lambda^2\left(\lambda u_{n-3}(\lambda) + (-1)^{n-3}\right) + \lambda(-1)^{n-2} + (-1)^{n-1} \\
&= \lambda^3 u_{n-3}(\lambda) + \lambda^2(-1)^{n-3} + \lambda(-1)^{n-2} + (-1)^{n-1} \\
&\vdots \\
&= \lambda^{n-1}u_1(\lambda) + \lambda^{n-2}(-1)^1 + \lambda^{n-3}(-1)^2 + \ldots + \lambda(-1)^{n-2} + (-1)^{n-1} \\
&= \lambda^{n-1} + \lambda^{n-2}(-1)^1 + \lambda^{n-3}(-1)^2 + \ldots + \lambda(-1)^{n-2} + (-1)^{n-1}
\end{aligned}$$

On multipliant par $\lambda + 1$, on trouve :

$$\begin{aligned}
(\lambda+1)u_n(\lambda) &= \lambda^n + \lambda^{n-1}(-1)^1 + \lambda^{n-2}(-1)^2 + \ldots + \lambda^2(-1)^{n-2} + \lambda(-1)^{n-1} \\
&\quad +\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2}(-1)^1 + \lambda^{n-3}(-1)^2 + \ldots + \lambda(-1)^{n-2} + (-1)^{n-1} \\
&= \lambda^n + (-1)^{n-1} \\
&= \lambda^n - (-1)^n.
\end{aligned}$$

Donc, si $\lambda \neq -1$, $u_n(\lambda) = \dfrac{\lambda^n - (-1)^n}{\lambda + 1}$.

(d) Si $\lambda = -1$, $u_1(\lambda) = 1$, $u_2(\lambda) = -2$, $u_3(\lambda) = 3$ et $\forall n \in \mathbf{N}^*$,

$$u_n(\lambda) = (-1)^{n-1} + (-1)^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1} + (-1)^{n-1} = n(-1)^{n-1}.$$

●●●●●●●●●●