Devoir surveillé $n^\circ 03$
Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

Exercice 1

1. On calcule le polynôme caractéristique χ_A de A :

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-3)[(\lambda-2)^2-1] = (\lambda-3)^2(\lambda-1)$$

On sait que π_A divise χ_A et que π_A et χ_A ont les mêmes racines, on en déduit que $\pi_A \in \{\chi_A, (X-3)(X-1)\}$. Le sous-espace propre associé à la valeur propre double 3 est de dimension 1 ($E_3(A) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$), donc $\pi_A = \chi_A$.

Cela montre que le polynôme caractéristique de A divise tous les polynômes annulateurs de A

2. Montrons que $R[A] = \operatorname{Vect}(I_3, A, A^2)$.

• La famille (I_3, A, A^2) est libre. En effet, pour $(a_o, a_1, a_2) \in \mathbf{R}^3$, $a_0 I_3 + a_1 A + a_2 A^2 = 0$ implique que $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$ annule A et donc que χ_A divise P. Comme $\deg(\chi_A) = 3 > \deg(P)$ on obtient que $P = 0$ et donc $a_0 = a_1 = a_2 = 0$. On a bien montré que (I_3, A, A^2) est libre.
• Montrons que (I_3, A, A^2) engendre $R[A]$. Soit $M \in R[A]$. Il existe $P \in R[X]$ tel que $M = P(A)$. On effectue la division euclidienne de P par π_A :

$$P = Q\pi_A + R \text{ où } \deg(R) \leq 2.$$

On en déduit que $M = P(A) = R(A) \in \operatorname{Vect}(I_3, A, A^2)$.

3. Notons $\mathscr{C}(A)$ l'ensemble des matrices qui commutent avec A. On sait que $R[A]$ est une algèbre commutative et que $A \in R[A]$. On en déduit que $R[A] = \operatorname{Vect}(I_3, A, A^2) \subset \mathscr{C}(A)$ et donc $3 = \dim R[A] \leq \dim \mathscr{C}(A)$.

4. Le résultat est général. Il est vrai pour toute matrice A. Pour tout vecteur $u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$, on note

$$\varphi_u : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \to & \mathbf{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & ax+by+cz \end{array}$$

Pour un vecteur $v = (x,y,z) \in \mathbf{R}^3$, $\varphi_u(v) = u^t v$. Avec ces notations, $H_u = \ker(\varphi_u)$. Si H_u stable par f, alors pour tout $x \in H_u$, $\varphi_u(f(x)) = 0$, donc $\varphi_u \circ f \in \{\, \varphi \in E^* \mid \ker\varphi = H \,\}$. Or φ_u est un élément non nul de cette droite vectorielle, donc $\varphi_u \circ f$ est colinéaire à φ_u et donc il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $\varphi_u \circ f = \lambda\varphi_u$. La réciproque est immédiate.
Si $\mathscr{B}$ désigne la base canonique de $\mathbf{R}^3$, alors $\mathbf{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi_u) = {}^t u$, $\mathbf{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi_u \circ f) = {}^t u A$, donc

$$\varphi_u \circ f = \lambda\varphi_u \Leftrightarrow {}^t u A = \lambda {}^t u \Leftrightarrow {}^t A u = \lambda u$$

avec u vecteur colonne non nul.

5. On sait que $\operatorname{Sp}({}^t A) = \operatorname{Sp}(A) = \{1, 3\}$. De plus $E_1({}^t A) = \operatorname{Vect}(u_1)$ et $E_3({}^t A) = \operatorname{Vect}(u_2)$. où $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les plans stables sont les plans $H_1 = \{\, (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - y = 0 \,\}$ et $H_2 = \{\, (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = 0 \,\}$.

6. Soit π un projecteur de $\mathbf{R}^3$ qui commute avec f. Notons $F = \mathbf{Im}(\pi) = \ker(\pi - \mathbf{Id}_{\mathbf{R}^3})$ et $G = \ker(\pi)$ de sorte que π est le projecteur sur F et parallèlement à G. On sait que si π et f commutent alors $\ker(\pi - \mathbf{Id}_{\mathbf{R}^3})$ et $\ker(\pi)$ sont stables par f.
Réciproquement, si F et G sont stables par f. Pour tout vecteur $w \in \mathbf{R}^3$. On écrit $w = u + v$ où $u \in F$ et $v \in G$ alors

$$f(\pi(w)) = f(u) \text{ et } \pi(f(w)) = \pi(f(u) + f(v)) = \pi(f(u)) + \pi(f(v)) = f(u)$$

La dernière égalité vient du fait que $f(u) \in F$ et donc $\pi(f(u)) = f(u)$ et que $f(v) \in G$ donc $\pi(f(v)) = 0$.
On a donc montré que les projecteurs qui commutent à f sont les projecteurs sur F parallèlement à G où F et G sont stables par f. Cherchons alors les droites stables par f, c'est-à-dire les vecteurs propres. On trouve

$$E_1(A) = \mathrm{Vect}(v_1) \text{ et } E_3(A) = \mathrm{Vect}(v_2)$$

où $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Les droites stables sont donc :

$$D_1 = \mathrm{Vect}(1, -1, 0) \text{ et } D_2 = \mathrm{Vect}(1, 1, 0)$$

Les projecteurs qui commutent avec f sont donc :
• Les projecteurs triviaux 0 et $\mathbf{Id}_E$.
• Le projecteur sur H_1 parallèlement à D_1 et le projecteur sur D_1 parallèlement à H_1. On ne peut pas utiliser D_2 car elle est contenue dans H_1 et dans H_2.

• • • • • • • • • • •