Devoir surveillé $n^\circ 04$

Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

Exercice 1

Questions de cours.

Exercice 2

1. (a) Pour n entier supérieur ou égal à 2, $n^n \geq n^2$. Donc $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}$ et comme la série $\sum_{n\in\mathbf{N}^*} \frac{1}{n^2}$ est convergente, il en résulte que $\sum_{n\in\mathbf{N}} u_n$ est convergente.

(b) On a $\cosh(n^2) = \frac{1}{2}\left(e^{n^2} + e^{-n^2}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2}e^{n^2}$, et par suite $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n = \frac{2}{e^{n^2}}$. Les séries $\sum_{n\in\mathbf{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbf{N}} v_n$ (qui sont à termes positifs) sont donc de même nature.

Or, en remarquant que $n^2 \geq n$ implique $v_n \leq \frac{2}{e^n} = 2\left(\frac{1}{e}\right)^n$, on voit que la série $\sum_{n\in\mathbf{N}} v_n$ est convergente. Donc la série $\sum_{n\in\mathbf{N}} u_n$ est convergente.

(c) Si $\lambda > 1$, alors en choisissant α tel que $1 < \alpha < \lambda$, on a :

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^{\lambda-\alpha}} = 0,$$

ce qui prouve que la série $\sum_{n\in\mathbf{N}^*} u_n$ est convergente.

Si $\lambda < 1$, alors en choisissant α tel que $\lambda < \alpha < 1$, on a :

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha u_n = \lim_{n\to\infty} n^{\alpha-\lambda} \ln n = +\infty,$$

d'où la divergence de la série $\sum_{n\in\mathbf{N}^*} u_n$.

Si $\lambda = 1$, alors $\sum_{n\in\mathbf{N}^*} u_n$ est de même nature que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x} \mathrm{d}x$ et on en déduit aisément que la série $\sum_{n\in\mathbf{N}^*} u_n$ est divergente.

En conclusion la série $\sum_{n\in\mathbf{N}^*} \frac{\ln n}{n^\lambda}$ est convergente si, et seulement si, $\lambda > 1$.

(d) On a :

$$\begin{aligned} u_n &= n\ln\left(\frac{n}{1+n}\right) + 1 \\ &= 1 - n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= 1 - n\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

On en déduit d'abord que $u_n > 0$ pour n assez grand (ce qui n'est pas évident à première vue et qu'il ne faut pas oublier de dire) et ensuite que $\sum_{n\in\mathbf{N}^*} u_n$ est divergente.

2. (a) Si $\alpha \geq 1$, alors $n^\alpha \geq n$, d'où (puisque $\mathbf{E}$ est croissante) $\mathbf{E}(n^\alpha) > \mathbf{E}(n) = n$, d'où $[\mathbf{E}\,(n^\alpha)]! \geq n!$ et ensuite $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n!}$.

Comme la série $\sum_{n\in\mathbf{N}} \dfrac{1}{n!}$ est convergente, la série $\sum_{n\in\mathbf{N}} u_n$ est donc convergente.

(b) Si $0 < \alpha < 1$, on peut toujours trouver un entier $q \geq 2$ tel que $\dfrac{1}{q} \leq \alpha$ (car $\lim_{q\to\infty} \dfrac{1}{q} = 0$). Alors il vient $n^{\frac{1}{q}} \leq n^\alpha$, puis $\mathbf{E}\left(n^{\frac{1}{q}}\right) \leq \mathbf{E}\,(n^\alpha)$ et $\left[\mathbf{E}\left(n^{\frac{1}{q}}\right)\right]! \leq [\mathbf{E}\,(n^\alpha)]!$. D'où :

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{\left[\mathbf{E}\left(n^{\frac{1}{q}}\right)\right]!} = v_n.$$

Il suffit de montrer que la série $\sum_{n\in\mathbf{N}} v_n$ est convergente pour conclure à la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbf{N}^*} u_n$.

(c) Posons $v_m = \dfrac{m^p}{m!}$. Il s'agit de montrer que $v_m < 1$ pour m assez grand. Pour cela, il suffit de montrer que la série $\sum_{m\in\mathbf{N}^*} v_m$ est convergente (car alors $\lim_{m\to\infty} v_m = 0$, d'où $v_m < 1$ pour $m \geq m_o$). Or ceci résulte simplement de la règle de d'Alembert :

$$\lim_{m\to\infty} \frac{v_{m+1}}{v_m} = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m+1}\left(1+\frac{1}{m}\right)^p = 0 < 1.$$

(d) On a $\lim_{n\to\infty} [\mathbf{E}\,(n^\alpha)] = +\infty$. Donc, en prenant $p = q+1$ et $m = \mathbf{E}\,(n^\alpha)$ dans la question **(c)**, on voit que $[\mathbf{E}\,(n^\alpha)]! > [\mathbf{E}\,(n^\alpha)]^{q+1}$ pour n assez grand $(n \geq n_0)$. Alors, pour $n \geq n_0$, il vient :

$$[\mathbf{E}\,(n^\alpha)]! > (n^\alpha - 1)^{q+1} = n^{\frac{q+1}{q}}\left(1-\frac{1}{n^\alpha}\right)^{q+1}$$

et donc

$$0 < u_n < v_n = \left(1-n^{-\alpha}\right)^{-(q+1)} \frac{1}{n^{\frac{q+1}{q}}}$$

Comme $v_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{\frac{q+1}{q}}}$ pour n infini, on en déduit que les séries $\sum_{n\in\mathbf{N}^*} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbf{N}^*} v_n$ sont convergentes.

Problème

1. (a) Comme $f_n(-x) = -f_n(x)$, on peut se borner au cas $x > 0$. Pour $x > o$, on a $\lim_{n\to\infty} \arctan(n^\alpha x) = \dfrac{\pi}{2}$ avec $0 < f_n(x) \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2n^{2\alpha}}$.

Si $0 < \alpha \leq \dfrac{1}{2}$, alors $0 < 2\alpha \leq 1$ et les séries $\sum_{n\in\mathbf{N}^*} \dfrac{1}{n^{2\alpha}}$ et $\sum_{n\in\mathbf{N}^*} f_n(x)$ sont divergentes.

(b) En remarquant que $|\arctan u| \leq \dfrac{\pi}{2}$, il vient que, pour tout x de $\mathbf{R}$, $|f_n(x)| \leq \dfrac{\pi}{2n^{2\alpha}}$. Si $\alpha > \dfrac{1}{2}$, alors $2\alpha > 1$ et par suite la série est normalement convergente, donc uniformément convergente, sur $\mathbf{R}$. Comme les f_n sont continues sur $\mathbf{R}$, il en résulte (d'après un théorème classique !) que la fonction somme F_α est aussi continue sur $\mathbf{R}$.

2. (a) À cause de l'imparité des f_n, il suffit de montrer que F_α est continument dérivable sur l'intervalle $D =]0, +\infty[$. Étudions d'abord la dérivabilité de F_α sur D. Pour cela, puisque les f_n sont dérivables sur D, on cherche à appliquer le théorème classique de dérivation terme à terme d'une série de fonctions dérivables, ce qui conduit à étudier la convergence uniforme de la série $\sum_{n\in\mathbf{N}^*} f'_n$ déduite en dérivant terme à terme la série $\sum_{n\in\mathbf{N}^*} f_n$.

Pour $x \in D$, on a $f_n'(x) = \dfrac{1}{n^\alpha\left[1+(n^\alpha x)^2\right]}$.

Bien entendu, on observe que $|f_n'(x)| \leq \dfrac{1}{n^\alpha}$, mais ceci ne permet pas de conclure à la convergence normale (et donc uniforme) de la série $\sum\limits_{n\in\mathbf{N}^*} f_n'$ dans le cas où $\dfrac{1}{2} < \alpha \leq 1$ (et d'ailleurs dans ce cas, la question **2.(c)** fera voir que $\sum\limits_{n\in\mathbf{N}^*} f_n'$ ne converge pas uniformément sur D !).

Ainsi, l'étude de la convergence uniforme sur D de la série $\sum\limits_{n\in\mathbf{N}^*} f_n'$ conduit à une impasse...

Cependant, si on se restreint à un intervalle $I_a = [a, +\infty[$ où a est un réel strictement positif arbitraire, alors il est facile de voir que la série $\sum\limits_{n\in\mathbf{N}^*} f_n'$ converge normalement et donc uniformément sur I_a puisque, pour $x \in l_a$, on a $0 \leq f_n'(x) \leq v_n = \dfrac{1}{n^\alpha\left[1+a^2n^{2\alpha}\right]}$. Comme $v_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{a^2n^{3\alpha}}$ et $3\alpha > \dfrac{3}{2} > 1$. Or ceci n'est pas gênant pour notre but, qui est de montrer la la dérivabilité de F_α (et non pas la convergence uniforme de la série $\sum\limits_{n\in\mathbf{N}} f_n'$) sur D. En effet, puisque la série $\sum\limits_{n\in\mathbf{N}^*} f_n'$ converge uniformément sur tout intervalle I_a, F_α est donc dérivable sur I_a et de plus sa dérivée est donnée par :

$$F_\alpha'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha\left[1+(n^\alpha x)^2\right]} \tag{1}$$

comme, ceci est vrai pour tout réel $a > 0$ et comme $D = \bigcup\limits_{a>0} I_a$, il en résulte finalement que F_α est dérivable sur D tout entier et que sa dérivée est donnée par la relation (1).
Alors, en utilisant (1), le même raisonnement prouve que F_α est continue sur chaque I_a et donc sur D tout entier.

(b) $f_k'(x) = \dfrac{1}{k^\alpha\left[1+(k^\alpha x)^2\right]} \geq \dfrac{1}{2k^\alpha}$ si $|x| \leq \dfrac{1}{k^\alpha}$.

(c) Pour alléger, posons $T_n(x) = \sum\limits_{n+1\leq k\leq 2n} f_k'(x)$ et $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} f_k'(x)$.

Soit $x_n = \dfrac{1}{(2n)^\alpha}$. Alors, pour $n+1 \leq k \leq 2n$, on a $x_n \leq \dfrac{1}{k^\alpha}$, d'où en utilisant la question **(b)** précédente :

$$R_n(x_n) > T_n(x_n) \geq \sum_{n+1\leq k\leq 2n} \frac{1}{2k^\alpha} \geq \frac{n}{2(2n)^\alpha} = \frac{n^{1-\alpha}}{2^{\alpha+1}} \tag{2}$$

En particulier, si $\dfrac{1}{2} < \alpha \leq 1$, on obtient :

$$R_n(x_n) \geq \frac{1}{2^{\alpha+1}} \ \text{(car } n^{1-\alpha} = e^{(1-\alpha)\ln n} \geq 1\text{)}. \tag{3}$$

Alors, il est clair d'après la relation (3) que la série $\sum\limits_{n\in\mathbf{N}^*} f_n'$ ne converge pas uniformément sur $\mathbf{R}^*$.

3. (a) Pour tout $t \in]-1, 1[$, on a $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\arctan t) = \dfrac{1}{1+t^2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^{2n}$, de plus il y a convergence normale et donc uniforme sur tout intervalle $I_r = [0, r]$ où $0 < r < 1$. On peut donc intégrer terme à terme, ce qui donne :

$$\forall t \in I,\ \ \arctan t = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1}. \tag{4}$$

(b) Comme la suite $n \mapsto |u_n(t)|$ est strictement décroissante (car $0 < t < 1$) et comme $u_n(t)$ a le signe de $(-1)^n$, on peut donc écrire :

$$S_{2n+3}(t) - S_{2n+1}(t) = u_{2n+2}(t) + u_{2n+3}(t) = |u_{2n+2}(t)| - |u_{2n+3}(t)| > 0,$$

ce qui prouve que la suite $n \mapsto S_{2n+1}(t)$ est strictement croissante et par suite que :

$$\arctan t = \lim_{n\to\infty} S_{2n+1}(t) = \sup_{n\in\mathbf{N}} S_{2n+1}(t) > S_{2n+1}(t)$$

et ceci $\forall t \in I$ et $\forall n \in \mathbf{N}$.

(c) D'après la question **(b)**, $\arctan t > S_1(t) = t - \dfrac{t^3}{3} = t\left(1 - \dfrac{t^2}{3}\right)$. Or, pour $t \in I$, on a $1 - \dfrac{t^2}{2} > \dfrac{2}{3}$. Donc, pour $t \in I$, on a $\arctan t > \dfrac{2}{3}t$. Cette inégalité est aussi valable pour $t = 1$:

$$\arctan 1 = \frac{\pi}{4} \simeq 0,78 \;\text{ et }\; \frac{2}{3} \simeq 0,66.$$

4. (a) Pour $x > 0$, on a $f_n(x) > 0$ et par suite $F_\alpha(x) > \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$. Or, pour $1 \leq k \leq n$ et $0 < x \leq \dfrac{1}{n^\alpha}$, on a $0 \leq k^\alpha x \leq 1$, d'où l'on déduit en utilisant la question **3.(c)** : $f_k(x) \geq \dfrac{1}{k^\alpha}\dfrac{2x}{3}$.

Donc, pour $o < x \leq \dfrac{1}{n^\alpha}$, on obtient :

$$F_\alpha(x) > xA_n \;\text{ avec }\; A_n = \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}.$$

(b) En posant $x_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ et on utilisant **(a)** on a :

$$\frac{F_\alpha(x_n) - F_\alpha(0)}{x_n} > A_n$$

Si $\alpha \leq 1$, alors $\displaystyle\lim_{n\to\infty} A_n = +\infty$ et par suite F_α n'est pas dérivable au point 0.

(c) On a $f_n'(x) = \dfrac{1}{n^\alpha\left[1 + (n^\alpha x)^2\right]} \leq \dfrac{1}{n^\alpha}$.

Donc, si $\alpha > 1$, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{N}^*} f_n'$ converge uniformément sur $\mathbf{R}$ (il y a convergence normale !) et on peut dériver terme à terme :

$$\forall x \in \mathbf{R},\quad F_\alpha'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha\left[1 + (n^\alpha x)^2\right]}$$

En particulier, pour $x = 0$, il vient :

$$F_\alpha'(0) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha} = \zeta(\alpha)$$

où ζ est la fonction de Riemann.

•••••••••••