Problème I

PARTIE I : PRÉLIMINAIRE

1. Si A n'est pas inversible, alors il existe un vecteur $X =^t (x_1, x_2, ..., x_n)$ non nul tel que $(S)\quad AX = 0$. Comme X est non nul, il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_i \neq 0$ et $|x_i| = \max(|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|)$. La i-ième équation du système (S) s'écrit alors $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = 0$ et donc $|a_{ii}||x_i| \leq \sum\limits_{j\neq i} |a_{ij}||x_j|$, d'où :

$$|a_{ii}| \leq \sum_{j\neq i} |a_{ij}|.$$

Ceci montre le résultat demandé.

2. λ est une valeur propre de A si, et seulement si, la matrice $A - \lambda I_n$ est non inversible, et donc il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que

$$|a_{ii} - \lambda| \leq \sum_{j\neq i} |a_{ij}|.$$

Les images des valeurs propres de A appartiennent à la réunion des cercles de centre a_{ii} et de rayon

$$\sum_{j\neq i} |a_{ij}|.$$

3. Soit $\chi_A(X)$ le polynôme caractéristique de A. Montrons par récurrence sur n que $\chi_A(X) = (-1)^n P_n(X)$. Pour $n = 1$, c'est évident. Supposons le résultat vrai au rang $n-1$, montrons le au rang n. En développant par rapport à la première ligne, on aura :

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 & & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -X & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & -X & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & & \cdots & -a_2 & -a_1 - X \end{vmatrix} =$$

$$-X \begin{vmatrix} -X & 1 & & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -X & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & -X & 1 \\ -a_{n-1} & -a_{n-2} & & \cdots & -a_2 & -a_1 - X \end{vmatrix} + (-1)^{n+1}(-a_n) \begin{vmatrix} 1 & -X & & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ 0 & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & -X \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

et donc d'après l'hypothèse de récurrence

$\chi_A(X) = -1X(-1)^{n-1}(X^{n-1} + a_1X^{n-2} + ... + a_{n-1}) + (-1)^n a_n = (-1)^n(X^n + a_1X^{n-1} + ... + a_{n-1}X + a_n)$.

Donc les racines de P_n sont les valeurs propres de A, ainsi si λ est une racine de P_n, la matrice $A - \lambda I_n$ ne sera pas inversible et par conséquent $\exists i \in [\![1, n]\!]$ tel que

$$|a_{ii} - \lambda| \leq \sum_{j\neq i} |a_{ij}| = \begin{cases} 1, & \text{si } 1 \leq i \leq n-1 \\ \sum\limits_{j\neq i} |a_{ij}|, & \text{si } i = n \end{cases}$$

Les images des zéros de P_n appartiennent à la réunion de cercle unité $\mathscr{C}(0, 1)$ et le cercle $\mathscr{C}\left(-a_1, \sum\limits_{j\neq i} |a_{ij}|\right)$.

PARTIE II. ETUDE D'UN EXEMPLE

1. On a $M - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & -b & 0 \\ 0 & b & -b \end{pmatrix}$. Donc on peut vérifier facilement que $\text{rg}(f - Id) = 2$ et que $\text{Im}(f - Id) = \text{Vect}(e_1, e_3)$. D'autre part $(M - I_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $\text{Ker}\, f = \text{Vect}(v)$ avec $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

La famille (v, e_1, e_2) est libre, donc les sous-espaces $\text{Ker}\,(f - Id)$ et $\text{Im}(f - Id)$ sont supplémentaires.

2. Il est clair que $\text{Sp}(M) = \{1, a\}$ avec la valeur propre a est d'ordre 1, donc M est digonalisable si, et seulement si, $\dim(\text{Ker}\,(f - aId) = 2$.

Or $M - aI_3 = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$, donc $\text{Ker}\,(f - aId) = \text{Vect}(e_3)$ et $\dim(\text{Ker}\,(f - aId) = 1 < 2$, ainsi l'endorphisme f n'est pas diagonalisable.

3. Considérons la base $B = (v, e_1, e_3)$ et soit T la matrice de f dans cette base, on a, $f(v) = v, f(e_1) = ae_1 + be_3$ et $f(e_3) = ae_3$, donc :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$$

On a $M = PTP^{-1}$ et donc pour tout $n \in \mathbb{N},\quad M^n = PT^nP^{-1}$. Calculons d'abord T^n. Nous avons $T = \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & N \end{pmatrix}$ avec $N = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$.

On peut vérifier facilement que

$$N^n = \begin{pmatrix} a^k & 0 \\ bka^{k-1} & a^k \end{pmatrix},$$

d'où $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^k & 0 \\ 0 & bka^{k-1} & a^k \end{pmatrix}$ et par conséquent

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^k & 0 \\ 0 & bka^{k-1} & a^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La continuité de l'application linéaire $A \longmapsto PAP^{-1}$ montre que

$$\lim_{n\to\infty} M^n = P \lim_{n\to\infty} T^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

PARTIE III : QUELQUES PROPRIÉTÉS DES MATRICES STOCHASTIQUES

1. Soient $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq d}$ et $B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq d}$ deux matrices stochastiques suivant les lignes. Notons $C = (c_{ij})_{1\leq i,j\leq d}$ le produit AB.

On sait que $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{d} a_{ik}b_{kj}$, donc $c_{ij} \geq 0$. De plus, $\sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij} = \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{d} a_{ik}akj = \sum\limits_{k=1}^{d} a_{ik}\left(\sum\limits_{j=1}^{d} bkj\right) = 1$. Donc $C = AB$ est bien stochastique suivant les lignes.

2. Si $\lambda \in \text{Sp}(P)$, alors $P - \lambda I_d$ est non inversible et donc il existe $i \in [\![1, d]\!]$ tel que $|p_{ii} - \lambda| \leq \sum\limits_{j\neq i} p_{ij} = 1 - a_{ii}$.

3. **a)** D'après la question précédente il existe $i \in [\![1, d]\!]$ tel que $|p_{ii} - \lambda|1 - a_{ii}$, et comme $||\lambda| - p_{ii}| \leq 1 - p_{ii}$, alors $|\lambda| \leq 1$.

b) Il est clair que $P \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $1 \in \text{Sp}(P)$, d'où $\rho(P) = 1$.

c) Soit $Q = P - I_d$ et soit R la matrice carrée d'ordre $d - 1$ extraite de Q en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne :

$$R = \begin{pmatrix} a_{11} - 1 & a_{12} & \dots & a_{1,d-1} \\ a_{21} & a_{22} - 1 & \dots & a_{2,d-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d-1,1} & a_{d-1,2} & \dots & a_{d-1,d-1} \end{pmatrix}$$

La matrice $R = (r_{ij})_{1 \leq i,j \leq d-1}$ est à diagonale strictement dominante, en effet, pour tout $i \in [\![1, d]\!]$, on a :

$$|r_{ii}| - \sum_{j \neq i} |r_{ij}| = |a_{ii} - 1| - \sum_{j \neq i} a_{ij} = a_{id} > 0,$$

donc elle est inversible et par conséquent $\text{rg}(P - I) = d - 1$, donc $\text{Ker}\,(P - I_d) = 1$.

4. Soit $\lambda \in \text{Sp}(P)$, alors il existe $X =^t (x_1, ..., x_d) \neq 0$ tel que $PX = \lambda X$. On suppose $\lambda \neq 1$ (sinon la question est triviale, $s = 1$). Soit $i \in [\![1, d]\!]$ tel que $|x_i| = \max\limits_{1 \leq k \leq d} |x_k|$. L'égalité $PX = \lambda X$ conduit à

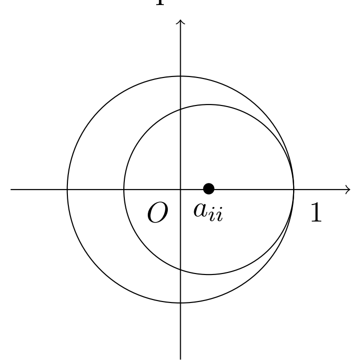
$$\lambda - a_{ii} = \sum_{j \neq i} a_{ij} \frac{x_j}{x_i} \quad (1)$$

On en déduit que

$$1 - a_{ii} = |\lambda| - a_{ii} \leq |\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} a_{ij} \left| \frac{x_j}{x_i} \right| \leq \sum_{j \neq i} a_{ij} = 1 - a_{ii}$$

Les inégalités sont donc toutes des égalités. On a donc les conclusions suivantes :

- L'égalité $1 - a_{ii} = |\lambda - a_{ii}|$ montre que λ est sur le cercle de centre a_{ii} et de rayon $1 - a_{ii}$. Si $a_{ii} > 0$ ce cercle est tangent intérieurement au cercle unité de $\mathbb{C}$ en 1. On aurait alors $\lambda = 1$, ce qui est exclu. On a donc nécessairement $a_{ii} = 0$. Il en résulte que l'ensemble $I = \{j \neq i / a_{ij} \neq 0\}$ est non vide.



- D'après le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire, les complexes $a_{ij} \dfrac{x_j}{x_i}$ pour $j \in I$ ont même argument. D'autre part, pour $j \in I$, on a $a_{ij} \left| \dfrac{x_j}{x_i} \right| = a_{ij}$, c'est-à-dire $|x_j| = |x_i|$. Soit donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $j \in I$, $x_j = e^{i\theta} x_i$. En remplaçant dans (1), on obtient :

$$\lambda = e^{i\theta} \sum_{j \in I} a_{ij} = e^{i\theta} \sum_{j=1}^{d} a_{ij} = e^{i\theta}.$$

Ainsi, $e^{i\theta} = \lambda$ et $x_j = \lambda x_i$ pour tout $j \in I$. On en déduit donc en particulier que si x_i est composante de X de module maximal, λx_i est aussi une composante de X de module maximal.
Soit maintenant $m \geq 1$ le nombre de coordonnées de X de module maximal. Donc parmi les $m+1$ complexes $x_i, \lambda x_i, \lambda^2 x_i, ..., \lambda^{m+1} x_i$, qui sont tous des composantes de X de module maximal, il en a nécessairement deux qui sont égaux. Il existe donc deux entiers r et t ($r < t$) tels que $\lambda^r x_i = \lambda^t x_i$ et comme $x_i \neq 0$, on a $\lambda^s = 1$ avec $s = t - r$.

5. Pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, on pose $S_\lambda = \{x \in E / \exists n \in \mathbb{N} / (u - \lambda id_E)^n(x) = 0\}$.
Montrons le résultat intermédiaire suivant :
Soit λ une valeur propre d'indice r.

a) $\mathrm{Ker}\ (u - \lambda Id_{\mathbb{C}^d})^r = S_\lambda$

b) *r est le plus petit des entiers tels que* $\mathrm{Ker}\ (u - \lambda Id_{\mathbb{C}^d})^r = S_\lambda$

En effet, il est clair $\mathrm{Ker}\ (u - \lambda Id_{\mathbb{C}^d})^r \subset S_\lambda$. Soit $x \in S_\lambda$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\mathrm{Ker}\ (u - \lambda Id_{\mathbb{C}^d})^n(x) = 0$$

• Si $n \leq r$, $(u - \lambda Id_{\mathbb{C}^d})^n(x) = (u - \lambda Id_{\mathbb{C}^d})^{r-n}(u - \lambda Id_{\mathbb{C}^d})^n(x) = 0$, c'est-à-dire $x \in \mathrm{Ker}\ (u - \lambda Id_{\mathbb{C}^d})^r$.
• Si $n > r$: On a : $\pi_u(X) = (X - \lambda)^r Q(X)$ avec $Q(\lambda) \neq 0$, donc

$$E = \mathrm{Ker}\ (u - \lambda Id_{\mathbb{C}^d})^r \oplus \mathrm{Ker}\ Q(u)$$

Soit $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \mathrm{Ker}\ (u - \lambda Id_{\mathbb{C}^d})^r$ et $x_2 \in \mathrm{Ker}\ Q(u)$. On a

$$(u - \lambda Id_{\mathbb{C}^d})^n(x_1) = (u - \lambda Id_{\mathbb{C}^d})^{n-r}(u - \lambda Id_{\mathbb{C}^d})^r(x_1) = 0$$

comme $(u - \lambda Id_{\mathbb{C}^d})^n(x) = 0$, alors $(u - \lambda Id_{\mathbb{C}^d})^n(x_2) = 0$, on a aussi $Q(u)(x_2) = 0$. Mais les polynômes $(X - \lambda)^n$ et Q étant premiers entre eux,

$$\mathrm{Ker}\ (u - \lambda Id_{\mathbb{C}^d})^n \cap Q = \{0\}$$

d'où $x_2 = 0$ et par conséquent $x = x_1 \in \mathrm{Ker}\ (u - \lambda Id_{\mathbb{C}^d})^r$ on conclut que $\mathrm{Ker}\ (u - \lambda Id_{\mathbb{C}^d})^r = S_\lambda$.
• Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Ker}\ (u - \lambda Id_{\mathbb{C}^d})^n = S_\lambda$. On a $\mathrm{Ker}\ (u - \lambda Id_{\mathbb{C}^d})^r \subset \mathrm{Ker}\ (u - \lambda Id_{\mathbb{C}^d})^n$. Comme $\pi_u(X) = (X - \lambda)^r Q(X)$ avec $Q(\lambda) \neq 0$ (π étant le polynôme minimal de u), alors $(X - \lambda)^n$ et Q sont premiers entre eux et donc

$$\mathrm{Ker}\ (u - \lambda Id_{\mathbb{C}^d})^n \cap \mathrm{Ker}\ Q(u) = \{0\}$$

On pose $P(X) = (X - \lambda)^n Q(X)$, on a

$$\mathrm{Ker}\ P(u) = \mathrm{Ker}\ (u - \lambda Id_{\mathbb{C}^d})^n \oplus \mathrm{Ker}\ Q(u) = E,$$

c'est-à-dire $P(u) = 0$, donc $\deg P \geq \deg \pi$ et donc $n \geq r$.
On peut ainsi caractériser les valeurs propres d'indices 1 :

$$\lambda \textit{ est d'indice 1 si, et seulement si, } \mathrm{Ker}\ (u - \lambda Id_{\mathbb{C}^d}) = S_\lambda$$

Revenons maintenant à notre question. D'après ce précède il suffit de montrer que $\mathrm{Ker}\ (u - \lambda Id_{\mathbb{C}^d}) = S_\lambda$, on a évidement $\mathrm{Ker}\ (u - \lambda Id_{\mathbb{C}^d}) \subset S_\lambda$, il reste à montrer que $S_\lambda \subset \mathrm{Ker}\ (u - \lambda Id_{\mathbb{C}^d})$. On va montrer que

$$x \in S_\lambda \Longrightarrow u(x) = \lambda x.$$

Les vecteurs de S_λ pour lesquels $n = 1$ appartiennent à $\mathrm{Ker}\,(u - \lambda Id_{\mathbb{C}^d})$, on va raisonner par récurrence. Supposons :

$$\forall x \in \mathbb{C}^n,\ \ (u - \lambda Id_{\mathbb{C}^d})^n(x) = 0 \Longrightarrow u(x) = \lambda x.$$

Soit y tel que $(u - \lambda Id_{\mathbb{C}^d})^n(y) = 0$. On pose $z = u(y) - \lambda y = (u - \lambda Id_{\mathbb{C}^d})(y)$, d'où :

$$(u - \lambda Id_{\mathbb{C}^d})^n(z)^n = (u - \lambda Id_{\mathbb{C}^d})^{n+1} = 0.$$

L'hypothèse de récurrence entraîne $u(z) = \lambda z$. L'égalité $u^k(y) = \lambda^k y + k\lambda^{k-1}z$ est vérifie pour $k = 1$. Supposons la vérifie pour l'entier k. Alors

$$\begin{array}{rcl} u^{k+1}(y) & = & u[\lambda^k y + k\lambda^{k-1}z] \\ & = & \lambda^k u(y) + k\lambda^{k-1}u(z) \\ & = & \lambda^k(\lambda y + z) + k\lambda^{k-1}\lambda z \\ & = & \lambda^{k+1}y + (k+1)\lambda^k z \end{array}$$

la formule est établie.
Une récurrence simple montre que $\|u^k(y)\|_1 \le \|y\|_1$. Prenons $k = ms$ où s est l'entier tel que $\lambda^s = 1$ et où $m \in \mathbb{N}$. On a :

$$u^{ms}(y) = \lambda^{ms}y + (ms)\lambda^{ms-1}z = y + ms\lambda^{-1}z$$

D'où

$$\|y\|_1 \ge \|u^{ms}(y)\|_1 = \sum_{i=1}^{d} |y_i + ms\lambda^{ms-1}z_i|$$

Si on suppose que $z = u(y) - \lambda y \neq 0$, alors un au moins des z_i est non nul, et comme le deuxième membre tend vers $+\infty$, lorsque m tend vers $+\infty$, on peut trouver m assez grand pour que l'inégalité ci-dessus ne soit pas vérifiée. Donc nécessairement $z = 0$, c'est-à-dire $u(y) = y$, d'où $S_\lambda \subset \mathrm{Ker}\,(u - \lambda Id_{\mathbb{C}})$ et donc on a l'égalité $S_\lambda = \mathrm{Ker}\,(u - \lambda Id_{\mathbb{C}})$, c'est-à-dire λ est d'indice 1.

6.

Cas où P est diagonalisable : Il existe Q une matrice inversible et $D = \mathrm{diag}(1, \lambda_2, ..., \lambda_d)$ une matrice diagonale telles que

$$P = QDQ^{-1}$$

et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P^n = Q\,\mathrm{diag}(1, \lambda_2^n, ..., \lambda_d^n)Q^{-1}$, l'application linéaire $M \longmapsto QMQ^{-1}$ étant continue, donc $\lim\limits_{n\to\infty} P^n = Q\,\mathrm{diag}(1, 0, ..., 0)Q^{-1}$.

Remarque : Si $L = (q_{11}, q_{12}, ..., a_{1d})$ désigne la première ligne de la matrice Q^{-1}, alors

$$\lim_{n\to\infty} P^n = Q\,\mathrm{diag}(1, 0, ..., 0)Q^{-1} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1d} \\ q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1d} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1d} \end{pmatrix},$$

car

$$\begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 1 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & * & \dots & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1d} \\ * & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & \dots & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1d} \\ q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1d} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1d} \end{pmatrix}.$$

Cas où P est non diagonalisable : Il existe Q une matrice inversible et T une matrice triangulaire supérieure telles que

$$P = QTQ^{-1}$$

Posons $T = \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & A \end{pmatrix}$. Il est clair que $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(P)\backslash\{1\}$ et d'après l'introduction, il existe une matrice D diagonalisable et N nilpotente telles que $A = D + N$, $DN = ND$ et $\text{Sp}(D) = \text{Sp}(D)$, alors on a, pour tout $n \geq p$:

$$A^n = D^n + \sum_{k=1}^{n} \complement_n^k D^{n-k}N^k = D^n + \sum_{k=1}^{p-1} \complement_n^k D^{n-k}N^k$$

(p étant l'indice de nilpotence de N)
Puisque $\rho(A) < 1$, alors $\|D\|_\infty \neq 1$. Soit $k = \max\limits_{1\leq k\leq p-1} \complement_n^k \|N\|_\infty^k$, alors on a :

$$\begin{aligned} \|A^n\|_\infty &\leq \|D^n\|_\infty + k\sum_{k=1}^{p-1} \|D\|_\infty^{n-k} \\ &\leq \|D\|_\infty^n + k\|D\|_\infty^{n-p+1} \sum_{i=0}^{p-1} \|D\|_\infty^i \\ &\leq \|D\|_\infty^n + k\|D\|_\infty^{n-p+1} \frac{1 - \|D\|^{p-1}}{1 - \|D\|_\infty}. \end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{n\to\infty} D^n = \lim\limits_{n\to\infty} A^n = 0$ et comme $P^n = Q\begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & A^n \end{pmatrix}Q^{-1}$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} P^n = Q\,\text{diag}(1, 0, ..., 0)Q^{-1}$.

Problème II

1. **a)** Par un calcul simple, on obtient : $[e, h](P) = e(h(P)) - h(e(p)) = 2P' = 2e(P)$ donc $[e, h] = 2e$
De même, $[f, h] = -2f$ et $[e, f] = h$.

b) Si P est un polynôme de degré r, alors, la famille

$$(e^r(P), \cdots, e^2(P), e(P), P, f(P), f^2(P), \cdots, f^{n-r}(P))$$

est une famille de $n + 1$ polynômes échelonnée en degré. Comme F est un sous espace stable par e et f, c'est une famille d'éléments de F. On a donc une famille libre de $n + 1$ éléments de F, sous espace vectoriel de E espace de dimension $n + 1$. Donc $E = F$.

2. On a $(e, f, h) \neq (0, 0, 0)$. On a alors, $e \neq 0$, $f \neq 0$ et $h \neq 0$ d'après les relations vérifiées par e, f, et h. On remarque que le "crochet" est bilinéaire et que pour tout $lu \in \mathscr{L}(E) \quad [u, u] = 0$.
Considérons une combinaison linéaire nulle de e, f et h : $\alpha e + \beta f + \gamma h = 0$.

$$0 = [e, [e, \alpha e + \beta f + \gamma h]] = [e, \beta h + 2\gamma e] = 2\beta e,$$

donc $\beta = 0$.

$$0 = [e, \alpha e + \gamma h] = +2\gamma e,$$

donc $\gamma = 0$ puis $\alpha = 0$.
On en déduit que (e, f, h) est libre et que $\dim \mathscr{L}_3 = 3$.

3. **a)** $x=\alpha e+\beta f+\gamma h\in\mathscr{J}$, donc $[e,[f,x]]=-2\gamma h\in\mathscr{J}$ donc $h\in\mathscr{J}$ car $\gamma\neq 0$.
De même, $[f,x]=-\alpha h-2\gamma f\in\mathscr{J}$ donc $f\in\mathscr{J}$. et $[e,x]=\beta h+2\gamma e\in\mathscr{J}$ donc $e\in\mathscr{J}$.
$\mathscr{J}$ st un sous-espace de $\mathscr{L}$ qui contient les trois vecteurs e, f et h d'une base de $\mathscr{L}$ donc $\mathscr{J}=\mathscr{L}$.

b) Si $\mathscr{J}\neq\{0\}$, alors, il contient un vecteur $x=\alpha e+\beta f+\gamma h$ avec $\alpha\neq 0$ ou $\beta\neq 0$ ou $\gamma\neq 0$.
Si $\gamma\neq 0$, alors on a montré que $\mathscr{J}=\mathscr{L}$.
On procède de même si $\alpha\neq 0$ ou $\beta\neq 0$.

4. **a)** Soit y un vecteur propre de h associé à une valeur propre α : $h(y)=\alpha y$.
De $eh-he=2e$, on déduit $e(h(y))-h(e(y))=2e(y)$ puis $h(e(y))=(\alpha-2)e(y)$.
Si $e(y)\neq 0$, $e(y)$ est donc un vecteur propre de $h$associé à la valeur propre $\alpha-2$.

b) h est un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, h possède donc au moins un vecteur propre y associé à une valeur propre α.
S'il n'existe aucun vecteur propre x de h tel que $e(x)=0$, alors, d'après la question précédente, $e(y)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\alpha-2$, $e(e(y))$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\alpha-4$ etc.
On obtient ainsi une infinité de valeurs propres α, $\alpha-2$, $\alpha-4$ etc, ce qui est impossible car l'espace vectoriel E est de dimension finie.

5. **a)** Montrons par récurrence que $h(f^k(x))=(\alpha+2k)f^k(x)$.
C'est vrai pour $k=0$.
Supposons le résultat vrai à un rang k et utilisons la relation $fh-hf=-2f$.

$$f(h(f^k(x)))-h(f(f^k(x)))=-2f(f^k(x))$$

$$(\alpha-2k)f^{k+1}(x)))-h(f^{k+1}(x))=-2f^{k+1}(x)$$

On en déduit $h(f^{k+1}(x))=(\alpha+2(k+1))f^{k+1}(x)$ et on peut conclure d'après le principe de récurrence :

$$h(f^k(x))=(\alpha+2k)f^k(x).$$

b) $f^0(x)=x\neq 0$. Si pour tout entier naturel m, $f^m(x)\neq 0$, alors on déduit du **a)** l'existence d'une infinité de valeurs propres pour h, endomorphisme d'un espace de dimension finie.
C'est impossible, il existe donc $m\in\mathbb{N}$ tels que $f^m(x)\neq 0$ et $f^{m+1}(x)=0$.

c) Montrons par récurrence que pour $k\in\mathbb{N}^*$,

$$e(f^k(x))=k(\alpha+k-1)f^{k-1}(x).$$

(cela servira dans la question **7.**).
Pour $k=1$, de $[e,f]=h$, on déduit $e(f(x))-f(e(x))=h(x)$, or $e(x)=0$ et $h(x)=\alpha x$ donc $e(f(x))=\alpha x$. L'hypothèse de récurrence au rang 1 est vaie.
Supposons l'hypothèse de récurrence vraie à un rang $k\in\mathbb{N}^*$:

$$e(f^k(x))=k(\alpha+k-1)f^{k-1}(x).$$

En appliquant la relation $ef-fe=h$ au vecteur $f^k(x)$, on obtient :

$$e(f^{k+1}(x))=(k(\alpha+k-1)+\alpha+2k)f^k(x)=(k+1)(\alpha+k)f^k(x),$$

hypothèse de récurrence au rang $k+1$

On peut conclure d'après le principe de récurrence que pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$e(f^k(x)) = k(\alpha + k - 1)f^{k-1}(x).$$

On en déduit que pour $k \in \mathbb{N}^*$, $e(f^k(x))$ est colinéaire à $f^{k-1}(x)$.

6. **a)** $F = \text{Vect}\{x, f(x), \cdots, f^m(x)\}$, on utilise les résultats de la question **5.**, $f^{m+1}(x) = 0$ donc F est stable par f.
$\forall k \in \mathbb{N}, \quad h(f^k(x)) = (\alpha + 2k)f^k(x) \in F$, on en déduit que F est stable par h.
$e(x) = 0$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad e(f^k(x)) = k(\alpha + k - 1)f^{k-1}(x) \in F$, on en déduit que F est stable par e.
F est donc stable par e, f et h
On sait que $F \neq \{0\}$ car $x \neq 0$, or E ne contient aucun sous-espace stable par $\mathscr{L}_3$ autre que $\{0\}$ et E.
On a donc $F = E$

b) En **a)**, on a montré que $\mathscr{B} = (x, f(x), \cdots, f^m(x))$ est une famille génératrice de E.
Considérons une combinaison linéaire nulle des vecteurs de $\mathscr{B}$:

$$a_0 x + a_1 f(x) + \cdots + a_m f^m(x) = 0.$$

$f^m(x) \neq 0$ et $f^{m+1}(x) = 0$, donc si on applique f^m à l'expression précédente, il reste : $a_0 f^m(x) = 0$.
On en déduit que $a_0 = 0$.
On recommence en appliquant f^{m-1} puis f^{m-2} etc. et on en déduit $a_1 = 0$ puis $a_2 = 0$ etc.
La famille $\mathscr{B}$ est donc libre.
Finalement : $\mathscr{B} = (x, f(x), \cdots, f^m(x))$ est une base de E

c) On a vu que $\forall k \in \mathbb{N}$, $h(f^k(x)) = (\alpha + 2k)f^k(x)$, la matrice dans la base $\mathscr{B} = (x, f(x), \cdots, f^m(x))$ est donc la matrice diagonale D telle que :

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & & & (0) \\ & \alpha + 2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \alpha + 2m \end{pmatrix}$$

d) De **c)**, on déduit :

$$\text{Tr}\, h = (m+1)\alpha + 2\sum_{k=0}^{m} k = (m+1)\alpha + m(m+1) = (m+1)(\alpha + m).$$

De $[e, f] = h$, on déduit :

$$\text{Tr}\, h = \text{Tr}(ef - fe) = \text{Tr}(ef) - \text{Tr}(fe) = 0.$$

On a donc $\alpha = -m$

7. On a montré que pour $k \in \mathbb{N}^*$, $e(f^k(x)) = k(\alpha + k - 1)f^{k-1}(x)$, de plus $e(x) = 0$, on en déduit que la matrice de e dans la base $\mathscr{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & & & (0) \\ & 0 & 2(\alpha+1) & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & m(\alpha + m - 1) \\ (0) & & & & 0 \end{pmatrix},$$

c'est la matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq m+1}$ avec $a_{ij} = (i+1)(\alpha + i)$ si $j = i + 1$ et $a_{ij} = 0$ sinon.

••••••••••