CORRIGÉ DU DS $n°2$

○●○●○●○

PROBLÈME I : CONTINUITÉ PAR RAPPORT AU SECOND MEMBRE DE LA SOLUTION D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE

Préliminaire : La formule de Taylor avec reste intégrale appliqueé à u entre 0 et x s'écrit :

$$u(x) = \sum_{k=0}^{n-1} u^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}u^{(n)}(t)dt$$

et comme $u^{(k)}(0) = 0$ pour tout $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$, alors $u(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}u^{(n)}(t)dt$.

Partie I : Pour $g \in F$ donnée, recherche de $f \in F$ vérifiant la relation :

$$(S) \quad : \quad \forall x \in [0,1], \;\; f(x) - \int_0^x f(t)dt = g(x).$$

Question 1.

1. Si $f \in F$ solution de (S), alors par dérivation $\forall x \in [0,1], f'(x) - f(x) = g'(x)$ et $f(0) = g(0)$ et par intégration la relation précédente on trouve l'équation fonctionnelle (S).
2. L'équation différentielle $y' - y = g'(x)$ s'écrit encore $(ye^{-x})' = g'(x)e^{-x}$, donc il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y(x)e^{-x} = \lambda + \displaystyle\int_0^x g'(t)e^{-t}dt$. Par conséquent la solution générale de $y' - y = g'(x)$ est de la forme :
$$y(x) = \lambda e^x + \int_0^x e^{x-t}g'(t)dt$$
où λ est une constante réelle.

Question 2.
La condition $f(0) = g(0)$ entraîne $\lambda = 0$ et une intégration par parties donne :

$$\forall x \in [0,1], f(x) = g(x) + \int_0^x e^{x-t}g(t)dt.$$

Question 3 : Application.
On trouve $f(x) = \dfrac{1}{2}(\cos x + \sin x + e^x)$.

PARTIE II : Quelques propriétés de la fonction $T : f \in E \mapsto T(f)$ définie par :

$$\forall x \in [0,1], T(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$$

Question 1.

1. Soient $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in [0,1]$, on a :
$$T(f + \lambda g)(x) = \int_0^x (f + \lambda g)(t)dt = \int_0^x f(t)dt + \lambda \int_0^x g(t)dt = T(f)(x) + \lambda T(g)(x).$$
Donc $T(f + \lambda g) = T(f) + \lambda T(g)$, de plus si $f \in E, T(f) \in E$, donc T est un endomorphisme de E.

2. Soit $f \in \ker(T)$, alors pour tout $x \in [0,1]$, $T(f)(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt = 0$ donc $T(f)' = f$ est nulle sur $[0,1]$ et par suite $\ker(T) = \{0\}$.
   Si $f \in E$, $T(f)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ et vérifie $T(g)(0) = 0$. Inversement, soit g une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ et vérifie $g(0) = 0$, alors pour tout $x \in [0,1]$, on a :
$$g(x) = \int_0^x g'(t)dt = T(g')(x).$$
   Donc $\mathrm{Im}\,(T) = \{f \in F / f(0) = 0\}$.

Question 2.

1. Il est clair que $\forall x \in [0,1], |T(f)(x)| \leq \|f\|_\infty \displaystyle\int_0^1 dt = \|f\|_\infty$. Donc $\|T(f)\| \leq \|f\|$, ceci montre que T est une application continue de $(E, \|.\|_\infty)$ dans $(E, \|.\|_\infty)$, car T est une application linéaire.
2. L'inégalité $\|T(f)\| \leq \|f\|$ prouve que $\|T\| \leq 1$.
3. Pour tout $x \in [0,1]$, on a $T(f_0)(x) = \displaystyle\int_0^x dt = x$, donc $\|T(f_0)\|_\infty = 1$.
4. Puisque $\dfrac{\|T(f_0)\|_\infty}{\|f_0\|_\infty} = 1$, alors $\dfrac{\|T(f_0)\|_\infty}{\|f_0\|_\infty} \leq \sup\limits_{f \neq 0} \dfrac{\|T(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty} \leq 1$, donc $\|T\| = 1$.

Question 3.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Si f est continue sur $[0,1]$, $T(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$. Supposons maintenant que $T^n(f)$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $[0,1]$, alors $x \mapsto T^{n+1}(f)(x) = \displaystyle\int_0^x T^n(f)(t)dt$ est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $[0,1]$ (la fonction sous signe intégral est de classe $\mathscr{C}^n$). On conclut donc avec le principe de récurrence.
2. On a $[T^n(f)]' = [T(T^{n-1}(f))]' = T^{n-1}(f)$, puis par dérivations successives, on obtient $[T^n(f)]^{(k)} = T^{n-k}(f)$ et ceci pour tout entier naturel $k \in \{0, ..., n-1\}$.
3. Il est evident que $[T^n(f)]^{(n)} = T^{n-n}(f) = f$ et $[T^n(f)]^{(k)}(0) = T^{n-k}(f)(0) = 0$ pour $k \in \{0, ..., n-1\}$.
4. On a $T^n(f)$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $[0,1]$ et pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $(T^n(f))^{(k)}(0) = 0$, donc d'après la question préliminaire : $\forall x \in [0,1]$,
$$\begin{aligned} T^n(f)(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}[T^n(f)]^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}[T^n(f)]^{(n)}(t)dt \\ &= \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)dt \end{aligned}$$
5. Soit $f \in \ker T^n$, alors $T^n(f) = 0$ et donc $[T^n(f)]^{(n)} = f = 0$ et par conséquent $\ker T^n = \{0\}$. Si $g \in \mathrm{Im}\, T^n$, alors il existe $f \in E$ tel que $g = T^n(f)$, donc g est de classe $\mathscr{C}^n$ et vérifie $g(0) = g'(0) = ... = g^{(n-1)}(0) = 0$. Inversement si $g \in E$ de classe $\mathscr{C}^n$ et verifie $g^{(k)}(0) = 0$ pour tout $k_\in [\![1, n-1]\!]$, alors
$$g(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(n-1)!} g^{(n)}(t)dt = T^n(g^{(n)})(x).$$
   On conclusion $\mathrm{Im}\,(T^n) = \{f \in \mathscr{C}^n / f(0) = f'(0) = ... = f^{(n-1)}(0) = 0\}$.
6. T^n est un endomorphisme continu de $(E, \|.\|)$, comme composé des endomorphismes continus de $(E, \|.\|)$.

7. Soit $f \in E$ et $x \in [0,1]$, on a :

$$(*)\ \ |T^n(f)(x)| = \left|\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)dt\right| \leq \|f\|_\infty \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt = \frac{x^n}{n!}\|f\|_\infty$$

Donc $\|T^n(f)\| \leq \dfrac{1}{n!}\|f\|$. Pour la fonction f_0 on a $\|f_0\|_\infty = 1$ et $\|T^n(f_0)\|_\infty = \dfrac{1}{n!}$, donc $\|T^n\| = \dfrac{1}{n!}$.

8. L'inégalité $(*)$ montre que $\forall f \in E, \forall x \in [0,1]$, $\lim\limits_{n\to\infty} T^n(f)(x) = 0$. D'autre part, on a $\lim\limits_{n\to\infty} \|T^n\| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n!} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} T^n = 0$.

Partie III : Pour $g \in E$ donnée, recherche de $f \in E$ vérifiant
Question 1.

1. Soient $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in [0,1]$, on a :

$$H(f+\lambda g)(x) = \int_0^x e^{x-t}(f+\lambda g)(t)dt = \int_0^x e^{x-t}f(t)dt + \lambda\int_0^x e^{x-t}g(t)dt = H(f)(x) + \lambda H(g)(x).$$

Donc $H(f+\lambda g) = H(f) + \lambda H(g)$, de plus si $f \in E$, $H(f) \in E$ (comme produit de deux fonctions continues sur $[0,1]$), donc H est un endomorphisme de E.

2. Soit $f \in E$ et $x \in [0,1]$, on a :

$$|H(f)(x)| \leq \|f\|e^x \int_0^x e^{-t}dt = \|f\|_\infty e^x(1-e^{-x}) \leq e\|f\|_\infty$$

Donc il suffit de prendre $K = e$, de plus $\|H(f)\|_\infty \leq e\|f\|_\infty$, inégalité qui montre que H est un endomorphism continu de E, et que $\|H\| \leq e$.

3. On remarque que $\forall x \in [0,1]$, $H(f)(x) = e^x \displaystyle\int_0^x e^{-t}f(t)$, donc $H(f)$ est le produit de deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, donc elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ et pour tout $x \in [0,1]$, $(H(f))'(x) = H(f)(x) + f(x)$.

Question 2.

Puisque $\forall f \in E$ et $\forall x \in [0,1]$, $|T^n(f)(x)| \leq \dfrac{1}{n!}$, la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} |T^n(f)(x)|$ est convergente, car la série numérique $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n!}$ converge.

PROBLÈME II : <u>FONCTIONS DE LEGENDRE ET TRANSFORMÉE DE LEGENDRE-FENCHEL</u>

Question préliminaire : Soient a et b de $\mathbb{R}$ tels que $a < b$. On veut montrer que $\varphi'(a) \leq \varphi'(b)$. On va en fait montrer la double inégalité suivante :

$$\varphi'(a) \leq \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a} \leq \varphi'(b).$$

φ est dérivable en b et la dérivée s'écrit :

$$\varphi'(b) = \lim_{t\to b} \frac{\varphi(b+t(a-b)) - \varphi(b)}{t(a-b)}$$

Or, $\forall t \in [0,1]$, on a $\dfrac{\varphi(b+t(a-b)) - \varphi(b)}{t(a-b)} \geq \dfrac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}$. Donc $\varphi'(b) \geq \dfrac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}$.
On montrerait l'autre inégalité de la même manière.

1. Il est clair que l'application $(x, y) \mapsto (Ax|y)$ est une forme bilinéaire symétrique et définie positive (d'après les hypothèses), donc l'application $x \mapsto \sqrt{(Ax|x)}$ définie une norme sur $\mathbb{R}^n$.
Ainsi, par l'équivalence des normes sur $\mathbb{R}^n$, il existe $k > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \ k\|x\| \leq \sqrt{(Ax|x)}$, ou encore $k\|x\|^2 \leq f(x)$, inégalité qui montre que $\lim\limits_{\|x\| \longrightarrow +\infty} \dfrac{f(x)}{\|x\|} = +\infty$.
Montrons maintenant que f est strictement convexe, en effet, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ \ x \neq y$, et $\forall t \in]0, 1[$, on a :
$$\begin{aligned} f(tx + (1-t)y) - tf(x) - (1-t)f(y) &= t(1-t)[(Ax|x) + (Ay|y) - 2(Ax|y)] \\ &= t(1-t)(A(x-y)|x-y) > 0. \end{aligned}$$
D'autre part, on a $f = b \circ l$ avec l l'application linéaire définie par $l(x) = (Ax, x)$ et b l'application bilinéaire définie par $b(x, y) = (Ax|y)$, donc f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.
Ainsi f est une fonction de Legendre.
2. On a $g(x) = (Ax|Ax) = ({}^tAAx|x)$ et la matrice symétrique ${}^tAA$ est définie positive si, et seulement si, A est inversible, donc l'application g est de Legendre si, et seulement si, A est inversible (d'après la question précédente). On peut remarquer aussi que l'application $x \mapsto \|Ax\|$ est une norme si, et seulement si, A est inversible et on conclut avec l'équivalence des normes.
3. <u>EXISTENCE :</u> Puisque $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} \dfrac{f(x)}{\|x\|} = +\infty$, alors $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$, donc il existe $R > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| \geq R \Rightarrow f(x) \geq f(0) + 1$. La partie $K = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| \leq R\}$ de $\mathbb{R}^n$ est un fermé et bornée, donc est un compact et par conséquent f est bornée et atteint ses bornes, en particulier il existe $x_0 \in K$ tel que $f(x_0) = \inf\limits_{x \in B} f(x)$. Mais si $x \notin K$, $f(x_0) \leq f(0) < f(x)$, donc x_0 est un minimum global.
<u>UNICITÉ :</u> Supposons qu'il existe $x_1 \neq x_0$ tel que $f(x_1) = f(x_0)$, alors par stricte convexité de f,
$$\forall t \in]0, 1[,\quad f(tx_0 + (1-t)f(x_1) < tf(x_0) + (1-t)f(x_1) = f(x_0)$$
ce qui est en contradiction avec la définition de $f(x_0)$.
4. Soient x et y de $\mathbb{R}^n$. Considérons la fonction $t \mapsto \varphi(t) = f(y + t(x-y))$, cette application est convexe sur $\mathbb{R}$, en effet, $\forall t, t' \in \mathbb{R}$ et $\forall \lambda \in]0, 1[$, on a :
$$\begin{aligned} \varphi(\lambda t + (1-\lambda)t') &= f(y + (\lambda t + (1-\lambda)t')(x-y)) = f(\lambda)(y + t(x-y)) + (1-\lambda)(y + t'(x-y)) \\ &\leq \lambda f(y + t(x-y)) + (1-\lambda)f(y + t'(x-y)) \\ &\leq \lambda\varphi(t) + (1-\lambda)\varphi(t'). \end{aligned}$$
Ainsi,
$$\varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)dt \leq \varphi'(1) = df_x(x-y).$$
D'où
$$f(x) - f(y) \leq df_x(x-y)$$
ou encore $f(y) \geq f(x) + \left(\overrightarrow{\text{grad}} f(x)|y-x\right)$.
5. Si f admet un point critique en x, $\overrightarrow{\text{grad}} f(x) = 0$ (f est classe $\mathscr{C}^1$) et la question précédente montre que $f(y) \geq f(x)$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, donc ce point critique est minimum (global), donc il est unique d'après la question 3.
6. Il est clair que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$ et tout $t \in]0, 1[$:
$$f_u(tx + (1-t)y) - tf_u(x) - (1-t)f_u(y) = f(tx + (1-t)y) - tf(x) - (1-t)f(y) < 0$$

Donc f_u est strictement convexe. D'autre part, si $x \neq 0$,

$$\frac{f_u(x)}{\|x\|} = \frac{f(x)}{\|x\|} - \frac{(u|x)}{\|x\|}$$

et comme $\left|\frac{(u|x)}{\|x\|}\right| \leq \|u\|$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f_u(x)}{\|x\|} = +\infty$, donc f_u est de Legendre.

7. Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$, $\overrightarrow{\text{grad}} f$ est continue sur $\mathbb{R}^n$. Soit $u \in \mathbb{R}^n$, alors il existe un seul point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $f_u(x_0) = \inf\limits_{x\in\mathbb{R}^n} f_u(x)$, donc $\overrightarrow{\text{grad}} f_u(x_0) = 0$, c'est-à-dire $\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0) - u = 0$. Donc l'application $\overrightarrow{\text{grad}} f$ est bien bijective.
8. (a) La croissance de la dérivée de la fonction convexe φ (de classe $\mathscr{C}^1$) définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(t) = f(tx)$ implique que

$$f(x) - f(0) = \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)dt \leq \varphi'(1) = \left(\overrightarrow{\text{grad}} f(x)|x\right) \leq \|\overrightarrow{\text{grad}} f(x)\|.\|x\|$$

et par conséquent $\left\|\overrightarrow{\text{grad}} f(x)\right\| \geq \dfrac{f(x) - f(0)}{\|x\|}$.

(b) Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de limite y. Montrons que la suite de terme général $\left(\overrightarrow{\text{grad}} f\right)^{-1}(y_n)$ tend vers $\left(\overrightarrow{\text{grad}} f\right)^{-1}(y)$. Posons $x = \left(\overrightarrow{\text{grad}} f\right)^{-1}(y)$ et pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \left(\overrightarrow{\text{grad}} f\right)^{-1}(y_n)$. Il faut donc montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x. La question 8.(a), montre que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée puisque $(\overrightarrow{\text{grad}} f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ($(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée, car elle est convergente). Soit donc une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un point x', par continuité de l'application $\overrightarrow{\text{grad}} f$, $\lim\limits_{n\to\infty} (\overrightarrow{\text{grad}} f)(x_{\varphi(n)}) = \overrightarrow{\text{grad}} f(x')$, c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to\infty} y_{\varphi(n)} = \overrightarrow{\text{grad}} f(x')$. Mais la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant convergente, donc $\lim\limits_{n\to\infty} y_{\varphi(n)} = y = \overrightarrow{\text{grad}} f(x)$, donc $\overrightarrow{\text{grad}} f(x') = \overrightarrow{\text{grad}} f(x)$, ainsi $x' = x$. Ainsi la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et converge vers x.
9. On remarque que $\sup\limits_{y\in\mathbb{R}^n} ((u|y) - f(y)) = -\inf\limits_{y\in\mathbb{R}^n} (f(y) - (u|y)) = -f(y_0) + (u|y_0)$ avec $\overrightarrow{\text{grad}} f(y_0) = u$ (la question 7.), donc

$$f^*(u) = \sup_{y\in\mathbb{R}^n} ((u|y) - f(y)).$$

10. Par définition, on a pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, $f^*(u+h) \geq (u+h|x) - f(x)$ avec au point $x = \left(\overrightarrow{\text{grad}} f\right)^{-1}(u)$, $f^*(u) = (u|x) - f(x)$ ce qui donne

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, \quad f^*(u+h) - f^*(u) \geq (h|x).$$

De la même manière, on a pour tout $k \in \mathbb{R}^n$, $f^*(u) \geq (u|x+k) - f(x+k)$ et $f^*(u+h) = (u+h|x+k) - f(x+k)$ et donc $\forall k \in \mathbb{R}^n, \quad f^*(u+h) - f^*(u) \leq (h|x+k)$, d'où :

$$\forall h, k \in \mathbb{R}^n, \quad (h|x) \leq f^*(u+h) - f^*(u) \leq (h|x+k)$$

ou encore

$$(*) \quad 0 \leq f^*(u+h) - f^*(u) - \left(\left(\overrightarrow{\text{grad}} f\right)^{-1}(u)|h\right) \leq (h|k)$$

et comme $(h|k) \leq \|k\|\|h\|$ et k tend vers 0, quand h tend vers 0, alors l'inégalité $(*)$ montre que f^* est différentiable au point u et que $\overrightarrow{\text{grad}} f^*(u) = \left(\overrightarrow{\text{grad}} f\right)^{-1}(u)$.

11. (a) On sait déjà que si f est strictement convexe, alors $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $f(y) \geq f(x) + \left(\overrightarrow{\text{grad}} f(x) | y - x\right)$.
La fonction g définie par $g(y) = f(y) - f(x) - \left(\overrightarrow{\text{grad}} f(x) | y - x\right)$ est partout positive, nulle en x et de classe $\mathscr{C}^1$, la valeur $g(x) = 0$ est donc le minimum absolu de g sur $\mathbb{R}^n$, et comme $\overrightarrow{\text{grad}} g(y) = \overrightarrow{\text{grad}} f(y) - \overrightarrow{\text{grad}} f(x)$, alors $\overrightarrow{\text{grad}} g(y) = 0$ en tout point y où $g(y) = 0$, ce qui montre que x est unique puisque $\overrightarrow{\text{grad}} f$ est injective, on a donc $g(y) > 0$ pour tout $y \neq x$.
Réciproquement, soit $g(t) = f(y + t(x-y))$ avec $x \neq y$, on a

$$tg'(t) = df_{y+t(x-y)}(t(x-y)) > f(y + t(x-y)) - f(y)$$

c'est-à-dire $tg'(t) - g(t) + g(0) > 0$
Soit $h(t) = \dfrac{g(t) - g(0)}{t}$, h est $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1]$ et $h'(t) = \dfrac{tg'(t) - g(t) + g(0)}{t^2} > 0$ donc h est strictement croissante. Donc $h(t) < h(1)$ pour tout $t \in]0,1[$, c'est-à-dire $\dfrac{g(t) - g(0)}{t} < g(1) - g(0)$, et par conséquent $f(y + t(x-y)) - f(y) < t(f(x) - f(y))$, donc f est strictement convexe.

(b) D'après la question 10., $f^*(u) - f^*(u_0) - \left(\overrightarrow{\text{grad}} f^*(u_0) | u - u_0\right) \geq 0$ et comme $\overrightarrow{\text{grad}} f^*$ est injective (comme $\overrightarrow{\text{grad}} f$), l'inégalité précédente est donc stricte pour tout $u \neq u_0$, il en résulte que f^* est strictement convexe (la question 11. (a)).
Pour finir il reste à montrer que $\lim\limits_{\|u\| \to \infty} \dfrac{f^*(u)}{\|u\|} = +\infty$. Pour $r > 0$, $K_r = \left(\overrightarrow{\text{grad}} f\right)^{-1} (\{x \in \mathbb{R}^* / \|x\| \leq r\})$ est un compact, donc il existe une constante M_r telle que $\|u_0\| \leq M_r$ et $f^*(u_0) \leq M_r$ pour tout $u_0 \in K_r$. Choisissons $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|u\| > M_r$, posons $x_0 = r\dfrac{u}{\|u\|}$ et $u_0 = \overrightarrow{\text{grad}} f(x_0)$. On sait que

$$f^*(u) \geq f^*(u_0) + (u - u_0 | x_0) \geq r\|u\| - |f^*(u_0)| - \|u_0\|.\|x_0\| \geq r\|u\| - (r+1)M_r$$

ce qui montre que $\lim\limits_{\|u\| \to \infty} \dfrac{f^*(u)}{\|u\|} = +\infty$.

12. Puisque $f = b \circ l$, alors :

$$\forall h, x \in \mathbb{R}^n, \quad df_x(h) = db_{(Ax,x)} \circ dl_x(h) = db_{(Ax,x)}(Ah, h) = 2(Ax|h).$$

D'où $\overrightarrow{\text{grad}} f = 2A$ et donc

$$f^*(u) = \frac{1}{2}\left(u|A^{-1}u\right) - f\left(\frac{1}{2}A^{-1}u\right) = \frac{1}{2}\left(A^{-1}u|u\right) - \left(\frac{1}{2}u|\frac{1}{2}A^{-1}u\right) = \frac{1}{4}\left(A^{-1}u|u\right).$$

$\overrightarrow{\text{grad}} f^* = \left(\overrightarrow{\text{grad}} f\right)^{-1} = \dfrac{1}{2}A^{-1}$.

• • • • • • • • • • •