DEVOIR SURVEILLÉ $n°3$

Correction
Med TARQI

•••••••

Partie I

1. Soient $A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ et $B=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et λ un nombre réel. On a :

$$\mathrm{Tr}(A+\lambda B)=\sum_{i=1}^{n}(a_{ii}+\lambda b_{ii})=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}+\lambda\sum_{i=1}^{n}b_{ii}=\mathrm{Tr}(A)+\lambda\,\mathrm{Tr}(B).$$

Donc T est bien linéaire.

2. Posons $C=AB=(c_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ et $D=BA=(d_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, avec $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$ et $d_{ij}=\sum_{k=1}^{n}b_{ik}a_{kj}$, donc :

$$\mathrm{Tr}(AB)=\sum_{i=1}^{n}c_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}b_{ki}a_{ik}=\sum_{k=1}^{n}d_{kk}=\mathrm{Tr}(BA).$$

3. Vérifions que u est homothétie, en effet, soient x et y de E, alors il existe λ_x, λ_y et λ_{x+y} des scalaires tels que

$$u(x)=\lambda_x x,\ u(y)=\lambda_y y \text{ et } u(x+y)=\lambda_{x+y}(x+y).$$

Si x et y sont libres, la condition $(\lambda_{x+y}-\lambda_x)x+(\lambda_{x+y}-\lambda_y)y=0$ implique $\lambda_y=\lambda_x$, et si $y=\alpha x$, alors

$$u(y)=u(\alpha x)=\alpha u(x)=\alpha\lambda_x x=\lambda_y y=\lambda_y\alpha x,$$

donc $\lambda_y=\lambda_x$. Ainsi il existe $\lambda\in\mathbb{K}$ tel que pour tout $x\in E$, $u(x)=\lambda x$, c'est-à-dire u est une homothétie.

4. Dans ces conditions u ne peut pas être une homothétie, donc il existe $x\in\mathbb{R}^n$ non nul tel que les vecteurs x et $u(x)$ ne sont pas colinéaires. On choisit alors une base de $\mathbb{R}^n$ de la forme

$$\mathscr{B}=(x,u(x),e_3,...,e_n).$$

Il suffit donc de prendre $F=\mathrm{Vect}(u(x),e_3,...,e_n)$.

Partie II

5. Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à A. Supposons que pour tout $x\in\mathbb{R}^2$, x et $u(x)$ sont colinéaires, d'après 3. u est une homothétie de rapport λ. Mais $\mathrm{Tr}(A)=2\lambda=0$, donc $\lambda=0$ et $A=0$. Supposons $A\neq 0$, donc il existe $x\neq 0$ de $\in\mathbb{R}^2$ tel que $(x,u(x))$ soit une base, donc A est semblable à une matrice de la forme

$$B=\begin{pmatrix}0&\alpha\\1&\beta\end{pmatrix}$$

et comme $\mathrm{Tr}(A)=0$, alors $\mathrm{Tr}(B)=\beta=0$, donc A est semblable à la matrice B qui est de trace nulle.

6. Si $D=\alpha I_2$, alors $\varphi(A)=DA-AD=0$ et ceci pour tout $A\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, par conséquent $\operatorname{Im}\varphi=\{0\}$.
Si $D=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$ avec $\alpha\neq\beta$, alors si $A=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$, $\varphi(A)=\begin{pmatrix}0 & (\alpha-\beta)y\\ (\beta-\alpha)z & 0\end{pmatrix}$, ceci montre que $\operatorname{Im}\varphi\subset\operatorname{Vect}(I,J)$ avec $I=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ et $J=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.
Soit $B=\begin{pmatrix}0 & \alpha\\ \beta & 0\end{pmatrix}$ une matrice de trace nulle. Cherchons $A=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$ telle que $DA-AD=B$, alors $A=\begin{pmatrix}x & \frac{\alpha}{a-b}\\ \frac{\beta}{b-a} & t\end{pmatrix}$, donc $\operatorname{Im}\varphi=\left\{B\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})/B=\begin{pmatrix}0 & \alpha\\ \beta & 0\end{pmatrix}\right\}$. (l'ensemble de matrices de trace nulle)
7. Si $A=XY-YX$ alors A est de trace nulle. Supposons que A est de trace nulle, d'après 5. A est semblable à une matrice $B\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dont les éléments diagonaux sont nuls, donc il P inversible tel que $A=P^{-1}BP$ et d'après 6., il existe $A'\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ tel que $B=DA'-A'D$ où D est une matrice diagonale, ainsi

$$A=P^{-1}BP=P^{-1}DA'P-P^{-1}A'DP=P^{-1}DPP^{-1}A'P-P^{-1}A'PP^{-1}DP=XY-YX$$

avec $X=P^{-1}DP$ et $Y=P^{-1}A'P$.
Après calculs, on trouve :
   - si $c\neq 0$, $X=\begin{pmatrix}1 & \frac{-2a}{c}\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix}0 & \frac{b}{2}\\ \frac{-c}{2} & 0\end{pmatrix}$.
   - si $c=0$ et $b\neq 0$, $X=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{-2a}{b} & -1\end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix}0 & \frac{b}{2}\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.
   - si $c=0$ et $b=0$, $X=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix}0 & \frac{a}{2}\\ \frac{a}{2} & 0\end{pmatrix}$.

8. (a) Notons $(E_{ij})_{1\le i,j\le n}$ la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Si $A=\sum\limits_{1\le i,j\le n}a_{ij}E_{ij}$ alors

$$\varphi(A)=\sum_{1\le i,j\le n}(d_i-d_j)a_{ij}E_{ij}.$$

Si $D=dI_n$, alors $\varphi(A)=0$ et donc $\operatorname{Im}\varphi=\{0\}$. Si D est quelconque, alors pour tout $(i,j)\in I$, $E_{ij}\in\operatorname{Im}\varphi$ et pour tout $(i,j)\in J$, $E_{ij}\in\ker\varphi$, ainsi $\operatorname{Vect}\{E_{ij}/(i,j)\in I\}\subset\operatorname{Im}\varphi$ et $\operatorname{Vect}\{E_{ij}/(i,j)\in J\}\subset\ker\varphi$. Or

$$\dim\operatorname{Vect}\{E_{ij}/(i,j)\in I\}+\dim\operatorname{Vect}\{E_{ij}/(i,j)\in J\}=n^2=\dim\operatorname{Im}\varphi+\dim\ker\varphi,$$

donc nécessairement, $\dim\operatorname{Vect}\{E_{ij}/(i,j)\in I\}=\dim\operatorname{Im}\varphi$ et $\operatorname{Vect}\{E_{ij}/(i,j)\in J\}=\dim\ker\varphi$, puis $\operatorname{Im}\varphi=\operatorname{Vect}\{E_{ij}/(i,j)\in I\}$ et $\ker\varphi=\operatorname{Vect}\{E_{ij}/(i,j)\in J\}$. Donc $\dim\operatorname{Im}\varphi=\operatorname{card}I$.

(b) Dans ce cas $I=\{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2/i\neq j\}$ et $J=\{(i,i)/i\in[\![1,n]\!]$. Par suite $\operatorname{Im}\varphi$ est l'espace des matrices de diagonale nulle tandis que $\ker\varphi$ est l'espace des matrices diagonales ; il est engendré par les matrices E_{ii} ($1\le i\le n$).

(c) Établissons le résultat demandé en raisonnant par récurrence sur la taille de la matrice A. Si A est taille 1, le résultat est triviale. Pour $n=2$ on a montré, dans la question 5., que toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice dont les éléments diagonaux sont nuls. Supposons la propriété établie au rang $n-1$. Soit A une matrice carrée d'ordre n de trace nulle et u l'endomorphisme canoniquement associé à A. Montrons que A est semblable à une matrice de la forme

$$B = \begin{pmatrix} 0 & * & \dots & * \\ 1 & & & \\ \vdots & & N & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad N \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{R}).$$

Si A est matrice d'une homothétie alors $\mathrm{Tr}(A) = 0$ permet de conclure $A = 0$. Sinon, il existe $x \in E$ tel que x et $u(x)$ sont non colinéaires. En introduisant une base dont x et $u(x)$ sont les deux premiers vecteurs (question 4.), on obtient que la matrice A est semblable à une matrice de la forme B, avec $\mathrm{Tr}\, N = \mathrm{Tr}\, B = \mathrm{Tr}\, A = 0$. Soit donc $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que

$$P^{-1}AP = B = \begin{pmatrix} 0 & * & \dots & * \\ 1 & & & \\ \vdots & & N & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Par l'hypothèse de récurrence il existe $R \in GL_{n-1}(\mathbb{R})$ et $U \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ à éléments diagonaux nuls vérifiant $R^{-1}NR = U$, alors la matrice $B' = (PQ)^{-1}A(PQ)$ où

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$$

a ses éléments diagonaux nuls et semblable à A.

D'après ce qui précède, il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathrm{Im}\,\varphi = E_n$ tels que $A = P^{-1}BP$ mais $B = DA' - A'D$ avec $A' \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (question 8 (a)), donc

$$A = P^{-1}DPP^{-1}A'P - P^{-1}A'PP^{-1}DP = XY - YX$$

avec $X = P^{-1}DP$ et $Y = P^{-1}A'P$.
On a $\mathrm{Tr}(X) = \mathrm{Tr}(D)$, si $\mathrm{Tr}(X) = 0$, alors D serait semblable à une matrice dont les éléments diagonaux sont nuls, ce qui est absurde.

Partie III

9. (a) Il existe des matrices B et C telles que $A = BC - CB$. On a $1 + j + j^2 = 0$ soit $-1 = j + j^2$ et par suite : $A = BC - CB = BC + jCB + j^2CB$ Avec $D = I$ il vient :

$$BDC = BIC = BC, DCB = ICB = CB \text{ et } CBD = CBI = CB$$

Finalement :

$$A = BDC + jDCB + j^2CBD$$

(b) Soit w tel que $w^4 = 1$. Supposons $A = XY - YX$. On a $-1 = w + w^2 + w^3$. Il vient :

$$A = XY - YX = XY + wYX + w^2YX + w^3YX.$$

Posons : $C = D = I$ et $B = X$, $E = Y$. Alors :

$$A = BCDE + wCDEB + w^2DEBC + w^3EBCD.$$

On peut généraliser facilement pour obtenir le théorème suivant :
<u>THÉORÈME :</u> *Soit A à coefficients dans $\mathbb{C}$ telle que $\mathrm{Tr}\, A = 0$ Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n > 1$ il existent n matrices $A_1, A_2, \dots, A_n$ telles que :*

$$(1) \quad A = \sum_{i=1}^{n} w^{i-1}(A_1A_2\dots A_n)^{(i)}$$

où $w = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ *et* $(A_1A_2...A_n)^{(j)} = A_jA_{j+1}...A_{j-1}$.

Remarque : Si A est de la forme (1) pour un entier $n > 1$, on a compte tenu de la propriété de la trace et par linéarité de la forme trace :

$$\operatorname{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} w^{i-1} \operatorname{Tr}(A_1A_2...A_n)^{(i)} = \operatorname{Tr}(A_1A_2...A_n)\sum_{i=1}^{n} w^{i-1} = 0(n > 1).$$

Problème I

PARTIE I : PRÉLIMINAIRE

1. Si A n'est pas inversible, alors il existe un vecteur $X =^t (x_1, x_2, ..., x_n)$ non nul tel que $(S)\ \ AX = 0$. Comme X est non nul, il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_i \neq 0$ et $|x_i| = \max(|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|)$. La i-ième équation du système (S) s'écrit alors $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = 0$ et donc $|a_{ii}||x_i| \leq \sum_{j\neq i} |a_{ij}||x_j|$, d'où :
$$|a_{ii}| \leq \sum_{j\neq i} |a_{ij}|.$$
Ceci montre le résultat demandé.
2. λ est une valeur propre de A si, et seulement si, la matrice $A - \lambda I_n$ est non inversible, et donc il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que
$$|a_{ii} - \lambda| \leq \sum_{j\neq i} |a_{ij}|.$$
Les images des valeurs propres de A appartiennent à la réunion des cercles de centre a_{ii} et de rayon
$$\sum_{j\neq i} |a_{ij}|.$$
3. Soit $\chi_A(X)$ le polynôme caractéristique de A. Montrons par récurrence sur n que $\chi_A(X) = (-1)^n P_n(X)$. Pour $n = 1$, c'est évident. Supposons le résultat vrai au rang $n - 1$, montrons le au rang n. En développant par rapport à la première ligne, on aura :
$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 & & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -X & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & -X & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & & \cdots & -a_2 & -a_1 - X \end{vmatrix} =$$
$$-X \begin{vmatrix} -X & 1 & & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -X & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & -X & 1 \\ -a_{n-1} & -a_{n-2} & & \cdots & -a_2 & -a_1 - X \end{vmatrix} + (-1)^{n+1}(-a_n) \begin{vmatrix} 1 & -X & & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ 0 & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & -X \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \end{vmatrix}$$
et donc d'après l'hypothèse de récurrence

$$\chi_A(X) = -1X(-1)^{n-1}(X^{n-1} + a_1X^{n-2} + ... + a_{n-1}) + (-1)^n a_n = (-1)^n(X^n + a_1X^{n-1} + ... + a_{n-1}X + a_n).$$

Donc les racines de P_n sont les valeurs propres de A, ainsi si λ est une racine de P_n, la matrice $A - \lambda I_n$ ne sera pas inversible et par conséquent $\exists i \in [\![1, n]\!]$ tel que

$$|a_{ii} - \lambda| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| = \begin{cases} 1, & \text{si } 1 \leq i \leq n-1 \\ \sum\limits_{j \neq i} |a_{ij}|, & \text{si } i = n \end{cases}$$

Les images des zéros de P_n appartiennent à la réunion de cercle unité $\mathscr{C}(0,1)$ et le cercle $\mathscr{C}\left(-a_1, \sum\limits_{j\neq i} |a_{ij}|\right)$.

PARTIE II. ETUDE D'UN EXEMPLE

1. (a) Notons $L_1, L_2, ..., L_n$ les lignes de la matrice $M - I_n$, alors on a :

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(M - I_n) &= \operatorname{rg}(L_1, L_2, ..., L_n) \\ &= \operatorname{rg}(L_1 - L_n, L_2 - L_n, ..., L_{n-1} - L_n, L_n) \\ &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \frac{n}{1-n} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{n-1} \\ 0 & \frac{n}{1-n} & \ddots & 0 & \frac{1}{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \frac{1}{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & \frac{n}{1-n} & \frac{1}{n-1} \\ \frac{n}{n-1} & \dots & \frac{n}{n-1} & \frac{n}{n-1} & -1 \end{pmatrix} \\ &\geq \operatorname{rg}\left(\frac{n}{1-n} I_{n-1}\right) = n - 1 \end{aligned}$$

D'autre part $f(v) = v$, donc nécessairement $\operatorname{rg}(f - Id) = n - 1$ et par conséquent $\ker(f - Id)$ est une droite vectorielle engendrée par v.

(b) On remarque que

$$\begin{aligned} (f - Id)(e_1 - e_2) &= \frac{n}{1-n}(e_1 - e_2) \\ (f - Id)(e_1 - e_3) &= \frac{n}{1-n}(e_1 - e_3) \\ &\vdots \\ (f - Id)(e_1 - e_n) &= \frac{n}{1-n}(e_1 - e_n), \end{aligned}$$

et comme $\operatorname{rg}(f - Id) = n - 1$ et $(e_1 - e_2, e_1 - e_3, ..., e_1 - e_n)$ est libre alors cette famille forme une base de $\operatorname{Im}(f - Id)$.

(c) Il suffit de remarquer que $(v, e_1 - e_2, e_1 - e_3, ..., e_1 - e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

(d) Puisque $v \in \ker(f - Id)$, alors $p(v) = v$. D'autre par $p(e_1 - e_i) = 0$ pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, donc $p(e_1) = p(e_2) = ... = p(e_n)$, mais $p(v) = \sum\limits_{i=1}^{n} p(e_i) = v$, donc pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $p(e_i) = \frac{1}{n}v$.

D'où :

$$P = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

(e) Puisque les sous-espaces $\mathrm{Im}(f - Id)$ et $\ker(f - Id)$ sont supplémentaires, alors les deux projecteurs sont associées et donc $p + q = Id$ et $p \circ q = q \circ p = 0$. En particulier $Q = I_n - P$.

2. $\dim\ker(f - Id) = 1$ montre que 1 est une valeur propre d'ordre de multiplicité au moins égale à 1. D'autre part, $M + \dfrac{1}{n-1}I_n = \dfrac{1}{n-1}J$ où $J = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ avec $a_{ij} = 1$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, donc $\mathrm{rg}(M + \dfrac{1}{n-1}I_n) = 1$, ceci montre que $\dfrac{1}{1-n}$ est une valeur propre de M, d'ordre supérieure ou égale à $n-1$. Donc les deux sous-espaces propres associés à 1 et $\dfrac{1}{n-1}$ sont supplémentaires, donc M est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(M) = \left\{1, \dfrac{1}{n-1}\right\}$.

Remarque : M est symétrique réelle, donc diagonalisable.

3. On a $M = P + \dfrac{1}{1-n}Q$, puis par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, on obtient $M^k = P + \left(\dfrac{1}{1-n}\right)^k Q$, d'où :

$$\lim_{k\to\infty} M^k = P.$$

Puisque les valeurs propres de M sont non nuls, la matrice M est inversible et $M^{-1} = P + (1-n)Q$.

PARTIE III : QUELQUES PROPRIÉTÉS DES MATRICES STOCHASTIQUES

1. Soient $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq d}$ et $B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq d}$ deux matrices stochastiques suivant les lignes. Notons $C = (c_{ij})_{1\leq i,j\leq d}$ le produit AB.
On sait que $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{d} a_{ik}b_{kj}$, donc $c_{ij} \geq 0$. De plus, $\sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij} = \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{d} a_{ik}akj = \sum\limits_{k=1}^{d} a_{ik}\left(\sum\limits_{j=1}^{d} bkj\right) = 1$.
Donc $C = AB$ est bien stochastique suivant les lignes.

2. Il est clair que toute matrice de permeation est une matrice stochastique, puisque $\sum\limits_{j=1}^{n} \delta_{i\sigma(j)} = 1$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

Soit A une matrice stochastique et inversible, notons $A^{-1} = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$. Supposons A^{-1} stochastique, donc $b_{ij} > 0$, d'où $i \neq j$ implique $\sum\limits_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj} = 0$ et donc $\forall k \in [\![1,n]\!],\ \ b_{ik}a_{kj} = 0$. Or pour k fixé, il existe $k \in [\![1,n]\!]$ tel que $b_{i(k)k} \neq 0$ (sinon A^{-1} a une colonne nulle), d'ou $j \neq k$ entraîne $a_{kj} = 0$ et $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj} = 1$ donne $a_{ki(k)} = 1$, de plus $i(k)$ étant unique (sinon deux termes égaux à 1 sur la ligne k de A). On définit ainsi une application $k \mapsto i(k)$ injective (sinon A a deux lignes identiques), donc c'est une permutation de $[\![1,n]\!]$, et A est nécessairement une matrice de permutation. Ainsi, l'ensemble des matrices stochastiques inversibles d'inverse stochastique est donc le sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices de permutations.

3. Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(P)$, alors $P - \lambda I_d$ est non inversible et donc il existe $i \in [\![1,d]\!]$ tel que $|p_{ii} - \lambda| \leq \sum\limits_{j\neq i} p_{ij} = 1 - a_{ii}$.

4. (a) D'après la question précédente il existe $i \in [\![1,d]\!]$ tel que $|p_{ii} - \lambda|1 - a_{ii}$, et comme $||\lambda| - p_{ii}| \leq 1 - p_{ii}$, alors $|\lambda| \leq 1$.

(b) Il est clair que $P\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$, donc $1\in\text{Sp}(P)$, d'où $\rho(P)=1$.

(c) Soit $Q=P-I_d$ et soit R la matrice carrée d'ordre $d-1$ extraite de Q en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne :

$$R=\begin{pmatrix} a_{11}-1 & a_{12} & \dots & a_{1,d-1}\\ a_{21} & a_{22}-1 & \dots & a_{2,d-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{d-1,1} & a_{d-1,2} & \dots & a_{d-1,d-1}\end{pmatrix}$$

La matrice $R=(r_{ij})_{1\le i,j\le d-1}$ est à diagonale strictement dominante, en effet, pour tout $i\in [\![1,d]\!]$, on a :

$$|r_{ii}|-\sum_{j\neq i}|r_{ij}|=|a_{ii}-1|-\sum_{j\neq i}a_{ij}=a_{id}>0,$$

donc elle est inversible et par conséquent $\text{rg}(P-I)=d-1$, donc $\ker(P-I_d)=1$.

5. <u>CAS OÙ P EST DIAGONALISABLE</u> : Il existe Q une matrice inversible et $D=\text{diag}(1,\lambda_2,...,\lambda_d)$ une matrice diagonale telles que

$$P=QDQ^{-1}$$

et donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $P^n=Q\,\text{diag}(1,\lambda_2^n,...,\lambda_d^n)Q^{-1}$, l'application linéaire $M\longmapsto QMQ^{-1}$ étant continue, donc $\lim\limits_{n\to\infty}P^n=Q\,\text{diag}(1,0,...,0)Q^{-1}$.

Remarque : Si $L=(q_{11},q_{12},...,a_{1d})$ désigne la première ligne de la matrice Q^{-1}, alors

$$\lim_{n\to\infty}P^n=Q\,\text{diag}(1,0,...,0)Q^{-1}=\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1d}\\ q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1d}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1d}\end{pmatrix},$$

car

$$\begin{pmatrix} 1 & * & \dots & *\\ 1 & * & \dots & *\\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots\\ 1 & * & \dots & *\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1d}\\ * & * & \dots & *\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ * & * & \dots & *\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1d}\\ q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1d}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1d}\end{pmatrix}.$$

<u>CAS OÙ P EST NON DIAGONALISABLE</u> : Il existe Q une matrice inversible et T une matrice triangulaire supérieure telles que

$$P=QTQ^{-1}$$

Posons $T=\begin{pmatrix}1 & (0)\\ (0) & A\end{pmatrix}$. Il est clair que $\text{Sp}(A)=\text{Sp}(P)\backslash\{1\}$ et d'après l'introduction, il existe une matrice D diagonalisable et N nilpotente telles que $A=D+N$, $DN=ND$ et $\text{Sp}(D)=\text{Sp}(D)$, alors on a, pour tout $n\ge p$:

$$A^n=D^n+\sum_{k=1}^{n}\complement_n^k D^{n-k}N^k=D^n+\sum_{k=1}^{p-1}\complement_n^k D^{n-k}N^k$$

(p étant l'indice de nilpotence de N)
Puisque $\rho(A) < 1$, alors $\|D\|_\infty \neq 1$. Soit $k = \max\limits_{1\leq k\leq p-1} \mathrm{C}_n^k \|N\|_\infty^k$, alors on a :

$$\begin{aligned}
\|A^n\|_\infty &\leq \|D^n\|_\infty + k\sum_{k=1}^{p-1} \|D\|_\infty^{n-k} \\
&\leq \|D\|_\infty^n + k\|D\|_\infty^{n-p+1} \sum_{i=0}^{p-1} \|D\|_\infty^i \\
&\leq \|D\|_\infty^n + k\|D\|_\infty^{n-p+1} \frac{1-\|D\|^{p-1}}{1-\|D\|_\infty}.
\end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{n\to\infty} D^n = \lim\limits_{n\to\infty} A^n = 0$ et comme $P^n = Q\begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & A^n \end{pmatrix} Q^{-1}$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} P^n = Q\,\mathrm{diag}(1, 0, ..., 0)Q^{-1}$.

• • • • • • • • • • •