

Corrigé du devoir surveillé n°4

M.Tarqi

AUTOUR DES MATRICES SYMÉTRIQUES

PREMIÈRE PARTIE

1. Si A et B sont deux matrices symétriques et $\lambda \in \mathbb{R}$, ${}^t(A + \lambda B) = {}^tA + \lambda {}^tB = A + \lambda B$, donc $A + \lambda B$ est symétrique et par suite $\mathcal{S}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n$.

Soit $(E_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{S}_n$, alors on peut écrire

$$A = \sum_{i=1}^n a_{ii} E_{ii} + \sum_{i < j} a_{ij} (E_{ij} + E_{ji}),$$

car $a_{ij} = a_{ji}$. Donc la famille $\{E_{ii}, i \in [1, n]\} \cup \{E_{ij} + E_{ji} / i < j\}$ engendre $\mathcal{S}_n$, de plus cette famille est libre, donc le sous-ensemble $\mathcal{S}_n$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$.

2. La relation $M \leq N$ se traduit par l'inégalité $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $Q_N(X) - Q_M(X) \geq 0$ dans $\mathbb{R}$.
La forme quadratique nulle est positive donc, pour tout $M \in \mathcal{S}_n$, $Q_M - Q_M \geq 0$, c'est-à-dire $M \leq M$. La relation $\leq$ est réflexive.
Si M et N sont dans $\mathcal{S}_n$ telles que $M \leq N$ et $N \leq M$, on a alors $Q_M \leq Q_N$ et $Q_N \leq Q_M$ donc $Q_M = Q_N$ puis $M = N$. La relation $\leq$ est symétrique.
Enfin, soit M, N et P dans $\mathcal{S}_n$ telles que $M \leq N$ et $N \leq P$, on a alors $Q_M \leq Q_N$ et $Q_N \leq Q_P$ donc $Q_M \leq Q_P$ puis $M \leq P$. La relation $\leq$ est transitive.

3. Soit $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres de A (théorème spectral), notons λ_i la valeur propre associée au vecteur propre v_i . Soit $X \in S$, $X = \sum_{i=1}^n x_i v_i$, alors $AX = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i v_i$ et donc

$${}^tXAX = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2.$$

D'où

$$\min_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \lambda \|X\|^2 \leq {}^tXAX \leq \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \lambda \|X\|^2,$$

ou encore

$$\min_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \lambda \leq {}^tXAX \leq \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \lambda$$

Ceci montre que $\{{}^tXAX / \|X\| = 1\}$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$, et que $\max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \lambda$ et $\min_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \lambda$ sont respectivement son maximum et son minimum (ils sont atteints).

4. (a) Soit $\lambda_0 \in \text{Sp}(A)$ tel que $|\lambda_0| = \rho(A)$ et $X_0 \in S$ tels que $AX_0 = \lambda_0 X_0$, donc ${}^tX_0AX_0 = \lambda_0$ et en tenant compte de la question précédente, on a donc $\mathcal{N}(A) = \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} |\lambda| = \rho(A)$.
(b) Soit $A \in \mathcal{S}_n$ tel que $\mathcal{N}(A) = 0$, donc $\text{Sp}(A) = \{0\}$ et comme A est diagonalisable, alors $A = 0$.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathcal{S}_n$, on a $\text{Sp}(\alpha A) = \{\alpha \lambda / \lambda \in \text{Sp}(A)\}$, donc $\max_{\lambda \in \text{Sp}(\alpha A)} |\lambda| = |\alpha| \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} |\lambda|$, c'est-à-dire $\mathcal{N}(\alpha A) = |\alpha| \mathcal{N}(A)$.
Soit $A, B \in \mathcal{S}_n$ et $X \in S$, on a :

$$|{}^tX(A+B)X| \leq |{}^tXAX| + |{}^tXBX| \leq \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} |\lambda| + \max_{\lambda \in \text{Sp}(B)} |\lambda| = \mathcal{N}(A) + \mathcal{N}(B).$$

D'où, par passage à la borne supérieure, $\mathcal{N}(A+B) \leq \mathcal{N}(A) + \mathcal{N}(B)$. En conclusion $\mathcal{N}$ est une norme sur $\mathcal{S}_n$.

- (c) Soit $A \in \mathcal{S}_n$ et $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres de A . Posons $\text{Sp}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ (λ_i valeur propre associée à v_i) et soit $X = \sum_{i=1}^n x_i v_i$, $Y = \sum_{j=1}^n y_j v_j$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\begin{aligned} |B_A(X, Y)| &= |{}^t X A Y| = |(X|AY)| \\ &\leq \|X\| \|AY\| = \|X\| \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j^2 y_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{l'inégalité de Cauchy-Schwarz} \\ &\leq \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} |\lambda| \|X\| \|Y\| = \mathcal{N}(A) \|X\| \|Y\|. \end{aligned}$$

- (d) D'après ce qui précède, on a pour tout $X, Y \in S$, $|B_A(X, Y)| \leq \mathcal{N}(A)$, d'autre part si $|\lambda_0| = \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} |\lambda|$ et $X_0 \in S$ tel que $A X_0 = \lambda_0 X_0$, alors $|B_A(X_0, X_0)| = |\lambda_0|$, donc $\max\{|B_A(X, Y)| / X, Y \in S\} = \mathcal{N}(A)$.
- (e) Il suffit de remarquer que $\text{Sp}(A^k) = \{\lambda^k / \lambda \in \text{Sp}(A)\}$.
- (f) Si $A \in \mathcal{S}_n$ et $r \in \mathbb{R}^+$, alors

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(A) \leq r &\Leftrightarrow \forall X \in S, |{}^t X A X| \leq r \\ &\Leftrightarrow \forall X \in S, -{}^t X (r I_n) X \leq {}^t X A X \leq {}^t X (r I_n) X \\ &\Leftrightarrow \forall X \in S, -Q_{r I_n}(X) \leq Q_A(X) \leq Q_{r I_n}(X) \\ &\Leftrightarrow -r I_n \leq A \leq r I_n. \end{aligned}$$

5. (a) $\mathcal{N}'$ n'est autre que la norme subordonnée associée à la norme euclidienne $\|\cdot\|$. D'autre part, si $M, N \in \mathcal{S}_n$ et $X \in S$, alors on a

$$\|M N X\| \leq \mathcal{N}'(M) \|N X\| \leq \mathcal{N}'(M) \mathcal{N}'(N) \|X\| \leq \mathcal{N}'(M) \mathcal{N}'(N).$$

En passant à la borne supérieure, on en déduit $\mathcal{N}'(M N) \leq \mathcal{N}'(M) \mathcal{N}'(N)$.

- (b) Si $A = {}^t M M$, alors ${}^t A = A$, donc $A \in \mathcal{S}_n$, de plus si $X \in \mathbb{R}^n$, $\|{}^t X A X\| = \|M X\|^2 \geq 0$ donc $O_n \leq A$. D'autre part si $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $M X = 0$, alors $A X = 0$, donc $\ker(M) \subset \ker(A)$, si $A X = 0$, alors $\|M X\| = 0$, donc $\ker(A) \subset \ker(M)$, par conséquent $\ker(A) = \ker(M)$, ceci montre aussi que A et M ont le même rang.
- On a :

$$\sup_{X \in S} |{}^t X A X| = \sup_{X \in S} \|M X\|^2,$$

donc $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}'(M)^2$.

6. Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ donc une suite de matrices symétriques croissante et majorée par M pour la relation proposée. On a donc : pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A_{k+1} - A_k$ positive donc pour toute colonne X ,

$${}^t X M X \geq {}^t X A_{k+1} X \geq {}^t X A_k X.$$

Donc pour toute colonne X , la suite réelle $({}^t X A_k X)_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée, donc converge. Soit $Q(X)$ sa limite. Montrons que Q est une forme quadratique et que, si $A \in \mathcal{S}_n$ la matrice associée à Q , $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = A$.

On note $Q_k = Q_{A_k}$ et B_k la forme polaire de Q_k :

$$\forall (X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2, B_k(X, Y) = \frac{1}{2}(Q_k(X + Y) - Q_k(X) - Q_k(Y))$$

Puisque $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^n$ vers Q , on obtient :

$$\forall (X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \lim_{k \rightarrow \infty} B_k(X, Y) = \frac{1}{2}(Q(X + Y) - Q(X) - Q(Y))$$

Ce qui prouve la convergence simple sur $(\mathbb{R}^n)^2$ de la suite d'applications $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vers

$$B : (X, Y) \mapsto \frac{1}{2}(Q(X + Y) - Q(X) - Q(Y)).$$

Par passage à la limite, on peut vérifier que B est symétrique et bilinéaire. De même $Q_k(X) = B_k(X, X)$ donne, à la limite, $Q(X) = B(X, X)$. Ainsi Q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ de forme polaire B . On notera A sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Nous allons maintenant montrer que la suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers A .

PREMIÈRE MÉTHODE : Montrons que $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers A pour la norme $\mathcal{N}'$. Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, la suite $(Q_k(X))_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante de limite $Q(X)$, en conséquence $\forall k \in \mathbb{N}$, $Q(X) - Q_k(X) \geq 0$, donc $A - A_k \geq 0$. Par la suite, nous posons :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \varphi_k = Q - Q_k, \quad \Phi_k = A - A_k \text{ et } \lambda_k = \rho(\Phi_k).$$

Soit $U_k \in S$ tel que $\Phi U_k = \lambda_k U_k$, avec ces notations nous obtenons :

$$\mathcal{N}'(\Phi_k) = \varphi_k(U_k) = \lambda_k$$

Montrons alors que la suite $(\varphi_k(U_k))_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante. En effet, l'inégalité $\varphi_{k+1} \leq \varphi_k$ donne $\varphi_{k+1}(U_{k+1}) \leq \varphi_k(U_{k+1})$ et $\varphi_k(U_k) = \max_{X \in S} \varphi_k(X)$ donne $\varphi_k(U_{k+1}) \leq \varphi_k(U_k)$, donc $\varphi_{k+1}(U_{k+1}) \leq \varphi_k(U_k)$.

Comme il s'agit d'une suite réelle positive, on en déduit qu'elle est convergente.

S étant compacte, donc de la suite $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ on peut extraire une suite $(U_{p_k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergente dans S . Posons $U = \lim_{k \rightarrow \infty} U_{p_k}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2$,

$$\begin{aligned} \varphi_k(X) - \varphi_k(Y) &= {}^t X \Phi_k X - {}^t Y \Phi_k Y \\ &= {}^t X \Phi_k (X - Y) - {}^t (X - Y) \Phi_k Y \\ &= (X | \Phi_k (X - Y)) - (X - Y | \Phi_k Y) \end{aligned}$$

On obtient d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$|\varphi_k(X) - \varphi_k(Y)| \leq 2 \|X\| \|X - Y\| \mathcal{N}'(\Phi_k)$$

Sachant que la suite $\mathcal{N}'(\Phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante positive, on a $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{N}'(\Phi_k) \leq \mathcal{N}'(\Phi_0) = \lambda_0$$

donc $\forall (X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2$

$$|\varphi_k(X) - \varphi_k(Y)| \leq 2 \lambda_0 \|X - Y\|.$$

On en déduit $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$|\varphi_{p_k}(U_{p_k}) - \varphi_{p_k}(U)| \leq 2 \lambda_0 \|U_{p_k} - U\|.$$

et donc

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\varphi_{p_k}(U_{p_k}) - \varphi_{p_k}(U)) = 0$$

Or la convergence simple de la suite d'applications $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vers 0 donne $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{p_k}(U) = 0$, d'où finalement $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{p_k}(U_{p_k}) = 0$, puisque la suite $(\varphi_{p_k}(U_{p_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ est extraite de la suite $(\varphi_k(U_k))_{k \in \mathbb{N}}$, les deux suites ont la même limite et enfin $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(U_k) = 0$, c'est-à-dire

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{N}'(A - A_k) = 0.$$

On a ainsi prouvé que la suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers A dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{S}_n, \mathcal{N}')$, donc elle converge pour toute autre norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, puisque toutes les normes sont équivalentes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

PREMIÈRE MÉTHODE : Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, l'élément $a_{ij}^{(k)}$ de la matrice A_k est égal à $B_k(e_i, e_j)$. Les suites $(a_{ij}^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ sont donc convergentes, on peut désigner leurs limites par a_{ij} . Soit la matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, l'égalité $a_{ij}^{(k)} = a_{ji}^{(k)}$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc par passage à la limite, on obtient $a_{ij} = a_{ji}$, donc A est symétrique. Cela montre que la convergence de la suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vers A au sens de la norme définie par $\|M\| = \sup_{i, j} |m_{ij}|$ si $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, puis on conclut avec l'équivalence des normes.

7. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathcal{S}_n$, on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{N}(x^k A^k) = |x|^k \mathcal{N}(A)^k = |rx|^k$, donc la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} x^k A^k$ converge si, et seulement si, $|xr| < 1$.
- (b) On a, pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$(I_n - xA) \left(\sum_{k=0}^N x^k A^k \right) = \sum_{k=0}^n x^k A^k - \sum_{k=0}^n (xA^{k+1}) = \sum_{k=0}^n x^k A^k - \sum_{k=0}^{N+1} x^k A^k = I_n - (xA)^{N+1},$$

de même $\left(\sum_{k=0}^n x^k A^k \right) (I_n - xA) = I_n - (xA)^{n+1}$. Donc on a :

$$(*) \quad (I_n - xA) \left(\sum_{k=0}^N x^k A^k \right) = \left(\sum_{k=0}^N x^k A^k \right) (I_n - xA) = I_n - (xA)^{n+1}.$$

Comme le produit $(M, N) \mapsto MN$ est continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et la suite $((xA)^k)_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers 0, alors par passage à la limite dans les deux membres de (*), on obtient

$$(I_n - xA)S_A(X) = S_A(X)(I_n - xA) = I_n.$$

Ceci montre que $I_n - xA$ est inversible et que $S_A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k A^k = (I_n - xA)^{-1}$.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a $\text{tr} \left(\sum_{k=0}^N x^k A^k \right) = \sum_{k=0}^N \text{tr}(A^k) x^k$, et comme l'application tr est continue (forme linéaire en dimension finie), donc on obtient par passage à la limite :

$$\text{tr} \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k A^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \text{tr}(A^k) x^k.$$

Considérons le polynôme $P_A(X) = \det(XI_n - A)$, c'est-à-dire $P_A(X) = (-1)^n \chi_A(X)$. Soit $B = {}^t\text{Co}(XI_n - A)$ la transposée de la comatrice de $XI_n - A$, on sait que B et $XI_n - A$ sont liés par la relation $B(XI_n - A) = \det(XI_n - A)I_n$. D'autre part, on sait que la dérivée d'un déterminant $\det(\Delta)$ est la somme des déterminants obtenus en dérivant successivement chaque colonne de la matrice Δ . Ici $\Delta = XI_n - A$, les dérivées ne portent que sur les termes de la diagonale principale. Les déterminants obtenus sont exactement les cofacteurs des éléments de la diagonale principale de $XI_n - A$, c'est-à-dire les éléments de diagonaux de la matrice B . En sommant on obtient la formule

$$\text{tr} [{}^t\text{Co}(XI_n - A)] = P'_A(X)$$

Revenons maintenant à la question, on a dans ces conditions avec $y = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$:

$$(yI_n - A)^{-1} = \frac{1}{\det(yI_n - A)} {}^t\text{Co}(yI_n - A)$$

D'où en prenant la trace, on obtient :

$$\text{tr} [(yI_n - A)^{-1}] = \frac{P'_A(y)}{P_A(y)}$$

D'où, en remplaçant y par $\frac{1}{x}$, la formule :

$$x \text{tr}(I_n - xA)^{-1} = \frac{P'_A\left(\frac{1}{x}\right)}{P_A\left(\frac{1}{x}\right)}$$

ou encore

$$\text{tr}(S_A(x)) = \frac{1}{x} \frac{\chi'_A\left(\frac{1}{x}\right)}{\chi_A\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

Pour $x = 0$, on vérifie facilement que $\text{tr}(S_A(0)) = \text{tr}(I_n) = n$.

- (c) **APPLICATION** : Si $b = 0$, $A = aI_n$ et dans ce cas $\mathcal{N}(A) = |a|$ et si $|ax| < 1$, $S_A(X) = \frac{1}{1-ax}I_n$ et $\text{tr}(S_A(x)) = \frac{n}{1-ax}$.

Supposons $b \neq 0$. On a $A = (a-b)I_n + bJ_n$, avec J_n la matrice d'ordre n dont toutes ses éléments sont égaux à 1.

Soit

$$B = A - (a-b)I_n = bJ_n$$

B est de rang 1, donc $\dim \ker(A - (a-b)I) = n-1$, c'est-à-dire $a-b$ est une valeur propre de A d'ordre au moins $(n-1)$.

Si λ est une autre valeur propre alors on aura $\text{tr}(A) = na = (n-1)(a-b) + \lambda$. Donc $\lambda = a + (n-1)b$ valeur propre simple. Comme $a + (n-1)b \neq b$ la matrice A est donc diagonalisable, de plus $\mathcal{N}(A) = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$.

Remarque : A est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable.

Puisque M est diagonalisable, alors le polynôme minimal est $\pi_A = (X - \alpha)(X - \beta)$, et donc

$$A^2 = (\alpha + \beta)A - \alpha\beta I_n.$$

D'après la division euclidienne de X^p de π_A il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha_p, \beta_p \in \mathbb{K}$ tels que

$$X^k = \pi_A Q(X) + \alpha_k X + \beta_p.$$

Donc $A^k = \alpha_k A + \beta_k$. En prenant $X = \alpha$ et $X = \beta$, on obtient donc $\alpha_k = \frac{\beta^k - \alpha^k}{\beta - \alpha}$ et $\beta_k = \frac{\beta\alpha^k - \alpha\beta^k}{\beta - \alpha}$.

Donc, pour $|rx| < 1$, on a :

$$S_A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k A^k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k \right) A + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k x^k \right) I_n$$

On a :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\beta x)^k - (\alpha x)^k}{\beta - \alpha} = \frac{1}{\beta - \alpha} \left(\frac{1}{1 - \beta x} - \frac{1}{1 - \alpha x} \right) = \frac{x}{(1 - \beta x)(1 - \alpha x)}$$

et

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta(\alpha x)^k - \alpha(\beta x)^k}{\beta - \alpha} = \frac{1}{\beta - \alpha} \left(\frac{\beta}{1 - \alpha x} - \frac{\alpha}{1 - \beta x} \right) = \frac{1 - (\beta + \alpha)x}{(1 - \beta x)(1 - \alpha x)}$$

D'où :

$$S_A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k A^k = \frac{x}{(1 - \beta x)(1 - \alpha x)} A + \frac{1 - (\beta + \alpha)x}{(1 - \beta x)(1 - \alpha x)} I_n$$

DEUXIÈME PARTIE

8. (a) Soit X un vecteur propre associé à une valeur propre λ de A , puisque $X \neq 0$, $(X|X) > 0$, d'où :

$$(X|AX) = \lambda(X|X)$$

ou encore

$$\lambda = \frac{(X|AX)}{(X|X)} \geq 0.$$

Inversement si les valeurs propres de A sont positives, alors, dans une base de diagonalisation de A :

$$(X|AX) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \geq 0.$$

(b) Dans ce cas les deux inégalités précédentes sont strictes.

9. (a) Nous avons ${}^tA = {}^t(tMM) = {}^tM({}^tM) = {}^tMM = A$. Donc $A \in \mathcal{S}_n$. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$${}^tXAX = {}^tX{}^tMMX = {}^t(MX)MX = \|MX\|^2 \geq 0.$$

Donc $A \in \mathcal{S}_n^+$.

Inversement, soit $A \in \mathcal{S}_n^+$. D'après le théorème spectral, il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que $A = PD^tP$. Posons $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Puisque A est dans $\mathcal{S}_n^+$, les λ_i sont positives et on peut poser $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ de sorte que $\Delta^2 = D$. On peut alors écrire

$$A = PD^tP = P\Delta\Delta^tP = {}^t(D^tP)\Delta^tP,$$

et la matrice $M = \Delta^tP$ convient.

- (b) D'après la question précédente on sait que $A \in \mathcal{S}_n^+$ si, et seulement si, il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = {}^tMM$. Ainsi $A \in \mathcal{S}_n^{++}$ si, et seulement si, $A \in \mathcal{S}_n^+$ et $\det A \neq 0$ ou encore si, et seulement si, $A = {}^tMM$ et $\det M \neq 0$.

10. (a) A et B étant symétriques réelles, donc diagonalisables dans des bases orthonormales. Soit $A = PD^tP$ et $A' = QD'^tQ$ avec P et Q sont des matrices orthogonales, $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $D' = \text{diag}(\lambda'_1, \dots, \lambda'_n)$ où les λ_i et λ'_i sont positifs. On a donc

$$\text{tr}(AA') = \text{tr}(PD^tPQD'^tQ) = \text{tr}(D^tPQD'^tQP) = \text{tr}(DRD'^tR)$$

avec $R = {}^tPQ$. Posons $R = (r_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, donc $\text{tr}(AA') = \sum_{i,k} \lambda_i \lambda'_i r_{ik}^2 \geq 0$.

Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}$, les λ_i et λ'_i sont strictement positifs, alors comme R est non nulle, il existe i et k tels que $r_{ik} \neq 0$ et dans ce cas $\text{tr}(AA') > 0$.

- (b) Dans ces conditions on a $Q_A(X) \leq Q'_A(X)$ et ceci pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Si $\det(A') = 0$, alors il existe X non nul tel que $Q'_A(X) = 0$ et donc $Q_A(X) = 0$, ce qui implique $\det(A) = 0$. Supposons maintenant $\det(A) > 0$, donc Q_A est définie positive, donc c'est un produit scalaire. Donc d'après le théorème spectral, il existe une base orthonormale pour $Q_{A'}$ tel que

$${}^tPAP = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad \text{et} \quad {}^tPA'P = \text{diag}(\lambda'_1, \dots, \lambda'_n)$$

et comme $Q_A(X) \leq Q'_A(X)$, on en déduit que pour tout i , $\lambda_i \leq \lambda'_i$, on a donc

$$\det({}^tPAP) = (\det P)^2 \det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i \leq \prod_{i=1}^n \lambda'_i = (\det P)^2 \det A'$$

Mais $\det P \neq 0$, donc on bien $\det A \leq \det A'$.

- (c) Soient A et B deux matrices symétriques réelles positives.

PREMIER CAS : Supposons qu'aucune des deux matrices A ou B n'est inversible, alors $\det A + \det B = 0$. D'autre part, la matrice $A + B$ est symétrique car $\mathcal{S}_n$ est un espace vectoriel et ses valeurs propres sont donc réelles. De plus, pour X vecteur colonne donné, ${}^tX(A+B)X = {}^tXAX + {}^tXBX \geq 0$. La matrice $A+B$ est donc symétrique réelle positive. Par suite, les valeurs propres de la matrice $A+B$ sont des réels positifs et puisque $\det(A+B)$ est le produit de ces valeurs propres, on a :

$$\det(A+B) \geq 0 = \det A + \det B.$$

DEUXIÈME CAS : Sinon, une des deux matrices A ou B est inversible. Supposons par exemple A est non inversible et par conséquent elle est définie positive. D'après la question 9.(b), il existe une matrice inversible M telle que $A = {}^tMM$. On peut alors écrire $A+B = {}^tMM+B = {}^tM(I_n + {}^t(M^{-1}BM^{-1})M)$ et donc

$$\det(A+B) = (\det M)^2 \det(I_n + {}^tM^{-1}BM^{-1}) = (\det M)^2 \det(I_n + C)$$

où $C = {}^tM^{-1}BM^{-1}$. La matrice C est symétrique, positive car pour tout vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$${}^tXCX = {}^tX({}^t(M^{-1})BM^{-1}X = {}^t(M^{-1}X)B(M^{-1}X) \geq 0$$

et ses valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des réels positifs. Les valeurs propres de la matrice $I_n + C$ sont les réels $1 + \lambda_i$, $1 \leq i \leq n$ et donc

$$\det(I_n + C) = (1 + \lambda_1) \dots (1 + \lambda_n) \geq 1 + \lambda_1 \dots \lambda_n = 1 + \det C.$$

Maintenant, $\det A = (\det M)^2$ puis $\det B = (\det M)^2 \det C$ et donc

$$\det A + \det B = (\det M)^2(1 + \det C) \leq (\det M)^2 \det(I_n + C) = \det(A + B).$$

11. Il est clair que la matrice C est symétrique. Considérons la forme quadratique associée à $C : \forall X \in \mathbb{R}^n$, $Q_C(X) = {}^tXQX$.

Posons $D(X) = \begin{pmatrix} x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $d(M) = \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ si $M = (x_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$.

On a $CX = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}u_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}u_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj}u_{nj}x_j \end{pmatrix}$, donc $Q_X(X) = {}^tXCX = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{ij}x_i x_j$. D'autre part, on vérifie que

$${}^tXd(AD(X)U) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{ij}x_i x_j. \text{ D'où } Q_C(X) = {}^tXd(AD(X)U). \text{ On aussi}$$

$$\text{tr}(D(X)AD(X)U) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{ij}x_i x_j,$$

d'où

$$Q_C(X) = \text{tr}(D(X)AD(X)U)$$

et comme $D(X)AD(X)$ et U sont dans $\mathcal{S}_n^+$, alors $Q_C(X) \geq 0$ (la question 10.(a)), donc $C \in \mathcal{S}_n^+$. De plus si A et U sont dans $\mathcal{S}_n^{++}$, alors $\forall X \neq 0$, $D(X)AD(X) \in \mathcal{S}_n^{++}$ et $Q_C(X) > 0$ pour tout X non nul, donc $C \in \mathcal{S}_n^{++}$.

12. Soit $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

EXISTENCE : D'après le théorème spectral, il existe P orthogonale et D diagonale telles que $S = PD^tP$.

Posons $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ où les λ_i , $1 \leq i \leq n$, sont des réels positifs puis $\Delta = \text{diag}(\sqrt[n]{\lambda_1}, \dots, \sqrt[n]{\lambda_n})$ et enfin $R = P\Delta^tP$. Il est évident que la matrice R est un élément de $\mathcal{S}_n^+$. Puis $R^k = P\Delta^{kt}P = PD^tP = S$.

UNICITÉ : Soit M un élément de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $M^k = S$. M est diagonalisable d'après le théorème spectral et donc $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(M)} E_M(\lambda)$. Mais si λ est une valeur propre de M , $\ker(M - \lambda I_n) \subset \ker(M^k - \lambda^k I_n) =$

$\ker(S - \lambda^k I_n)$. De plus, les valeurs propres de M étant positive, les λ^k , $\lambda \in \text{Sp}(M)$, sont deux à deux distincts ou encore les $\ker(S - \lambda^k I_n)$, $\lambda \in \text{Sp}(M)$, sont deux à deux distincts.

Ceci montre que pour chaque $\lambda \in \text{Sp}(M)$, $\ker(M - \lambda I_n) = \ker(S - \lambda^k I_n)$ et que les λ^k , $\lambda \in \text{Sp}(M)$, sont toutes les valeurs propres de S . Ainsi, nécessairement la matrice tPMP est une matrice diagonale D' . L'égalité $M^k = S$ fournit $D'^k = D$ puis $D' = \Delta$ et finalement $M = R$.

13. Soit $A \in \mathcal{S}_n^+$ telle que $A \leq I_n$ et soit P une matrice orthogonale et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une matrices diagonale telles que $A = PD^tP$. On a $M_0 = PO_n{}^tP$, supposons que $M_k = PD_k{}^tP$, D_k étant une matrice diagonale, on alors :

$$\begin{aligned} M_{k+1} &= \frac{1}{2} (I_n - A + M_k^2) \\ &= \frac{1}{2} (I_n - PD^tP + PD_k^2{}^tP) \\ &= \frac{1}{2} P (I_n - D + D_k^2) {}^tP \end{aligned}$$

On en déduit que $M_{k+1} = PD_{k+1}^t P$ avec $D_{k+1} = \frac{1}{2}(I_n - D + D_k^2)$ et que pour tout i , $a_{i,k+1} = \frac{1}{2}(1 - \lambda_i + a_{i,k}^2)$ où les $a_{i,k}$ sont les éléments diagonaux de D_k . On a, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\begin{aligned} a_{i,k+2} - a_{i,k+1} &= \frac{1}{2}(1 - \lambda_i + a_{i,k+1}^2) - \frac{1}{2}(1 - \lambda_i + a_{i,k}^2) \\ &= \frac{1}{2}(a_{i,k+1} - a_{i,k})(a_{i,k+1} + a_{i,k}) \end{aligned}$$

Les réels $a_{i,k}$ sont positifs (car $M_k \in \mathcal{S}_n^+$), donc $a_{i,k+2} - a_{i,k+1}$ est de même signe que $a_{i,k+1} - a_{i,k}$. Or $a_{i,1} - a_{i,0} = \frac{1 - \lambda_i}{2} \geq 0$ car $A \leq I_n$, donc la suite $(a_{i,k})_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante et comme elle est majorée, donc elle

converge vers un nombre réel $a_i \in \mathbb{R}^+$ qui vérifie la relation $a_i = \frac{1}{2}(1 - \lambda_i + a_i^2)$, c'est-à-dire $a_i = 1 - \sqrt{\lambda_i}$.

Posons $D = \text{diag}(1 - \sqrt{\lambda_1}, 1 - \sqrt{\lambda_2}, \dots, 1 - \sqrt{\lambda_n})$. La suite de matrices $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est donc convergente vers $L = PD^t P$.

La relation $M_{k+1} = \frac{1}{2}(I - A + M_k^2)$ montre, par passage à la limite, que $2L = I - A + L^2$ ou encore $(L - I)^2 = A$, d'autre on peut vérifier par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$, $M_k \leq I_n$ et donc $L \leq I_n$.

14. (a) Soient A et B deux matrices symétriques réelles positives. D'après la question 9.(a), il existe deux matrices carrées M et N telles que $A = {}^t M M$ et $B = {}^t N N$. On a alors $AB = {}^t M M {}^t N N$. La matrice AB a même polynôme caractéristique que la matrice $N({}^t M M {}^t N) = {}^t (M {}^t N) M {}^t N$. Or cette dernière matrice est symétrique positive et a donc des valeurs propres réelles positives. On a montré que les valeurs propres de la matrice AB sont réelles et positives.
- (b) Il existe une matrice inversible M tel que $A = {}^t M M$ et une matrice P inversible tel que $B = {}^t P D P$ (réduction des formes quadratiques). On a donc

$$AB = {}^t M M {}^t P D P = {}^t M (M {}^t P D P {}^t M) ({}^t M)^{-1} = {}^t M (P {}^t M) D (P {}^t M) ({}^t M)^{-1}$$

La matrice ${}^t (P {}^t M) D (P {}^t M)$ est symétrique réelle, donc diagonalisable, donc AB , qui est semblable à une matrice diagonalisable, est diagonalisable.

• • • • •