Corrigé du devoir surveillé $n°5$
M.Tarqi

EXERCICE : TRANSFORMÉE DE FOURIER

1. Considérons une fonction réglée f sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in R$, la fonction $t \mapsto f(t)e^{ixt}$ est réglée (produit d'une fonction continue et d'une fonction réglée) sur $\mathbb{R}$ et vérifie $|f(t)e^{ixt}| = |f(t)|$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}$. On en déduit que $\widehat{f}$ est définie sur $\mathbb{R}$.
2. (a) La fonction $(x,t) \mapsto f(t)e^{ixt}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, dominée par la fonction continue intégrable $t \mapsto |f(t)|$. Le théorème de continuité sous le signe intégrale assure la continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction $\widehat{f}$.
Soit $\varepsilon > 0$. L'intégrabilité de f sur $\mathbb{R}$ entraîne l'existence de $A > 0$ tel que
$$\int_{-\infty}^{-A} |f(t)|dt + \int_{A}^{+\infty} |f(t)|dt \leq \frac{\varepsilon}{2}$$
Ainsi on a
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left| \int_{-\infty}^{-A} f(t)e^{ixt}dt + \int_{A}^{+\infty} f(t)e^{ixt}dt \right| \leq \int_{-\infty}^{-A} |f(t)|dt + \int_{A}^{+\infty} |f(t)|dt \leq \frac{\varepsilon}{2}$$
D'autre part, le lemme de Lebesgue montre que $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \displaystyle\int_{-A}^{A} f(t)e^{ixt}dt = 0$, donc il existe $\alpha > 0$ tel que $|x| > \alpha$ entraîne $\displaystyle\int_{-A}^{A} f(t)e^{ixt}dt \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| > \alpha \Rightarrow \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{ixt}dt \leq \varepsilon$, donc $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \widehat{f}(x) = 0$.

   (b) Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ $h_n(x) = \displaystyle\int_{n}^{n+1} f(t)e^{ixt}dt + \int_{-(n+1)}^{-n} f(t)e^{ixt}dt$. f étant intégrable sur $\mathbb{R}$, donc la série de fonctions $\sum h_n$ converge simplement vers $2\pi\widehat{f}$. Remarquons que les h_n sont continues sur $\mathbb{R}$, en effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a :
$$\begin{aligned} |h_n(x) - h_n(y)| &\leq \int_{n}^{n+1} |f(t)||e^{ixt} - e^{iyt}|dt + \int_{-(n+1)}^{-n} |f(t)||e^{ixt} - e^{iyt}|dt \\ &\leq |x-y| \left(\int_{n}^{n+1} |f(t)|dt + \int_{-(n+1)}^{-n} |f(t)|dt \right), \end{aligned}$$
c'est-à-dire h_n est lipshitzienne sur $\mathbb{R}$.
Par ailleurs :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |h_n(x)| \leq \int_{n}^{n+1} |f(t)|dt + \int_{-(n+1)}^{-n} |f(t)|dt$$
qui est le terme général d'une série convergente (f est intégrable), donc la convergence est uniforme, il en découle la continuité de $\widehat{f}$ sur $\mathbb{R}$.
Enfin pour la limite de $\widehat{f}$ et $+\infty$, le raisonnement de (a) reste valable.
3. L'application $(x,t) \mapsto g(x,t) = f(t)e^{ixt}$ admet des dérivées partielles par rapport à x d'ordre 1 et 2 continues sur $\mathbb{R}^2$ et on a :
$$\frac{\partial^k g}{\partial x^k} g(x,t) = (it)^k f(t)e^{ixt}, \quad k = 1,2$$
et
$$\left| \frac{\partial^k g}{\partial x^k} g(x,t) \right| = |t^k f(t)| = \varphi_k(t), \quad k = 1,2$$

Les fonctions φ_1 et φ_2 intégrables sur $\mathbb{R}$. La théorème de dérivation sous le signe intégarle montre que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall k = 1, 2, \ \ \widehat{f}^{(k)}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (it)^k f(t) e^{ixt} dt.$$

4. (a) La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue intégrable sur $\mathbb{R}$. Sa transformée de Fourier s'écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2+ixt} dt.$$

Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2+ixt} dt$. On montre que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}, \ \ F'(x) = it \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2+ixt} dt$, d'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \ 2iF'(x) + ixF(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-2t + ix) e^{-t^2+ixt} dt = 0.$$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}, \ \ F(x) = F(0) e^{\frac{-x^2}{4}}$ et comme $F(0) = \sqrt{\pi}$ il vient que la transformée de Fourier de $t \mapsto e^{-t}$ est l'application définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \ x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{\frac{-x^2}{4}}.$$

(b) la fonction $(x, t) \mapsto \dfrac{\cos tx}{1 + t^2}$ est continue sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$, et vérifie :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[, \ \ \left| \frac{\cos tx}{1 + t^2} \right| \leq \frac{1}{1 + t^2},$$

fonction qui est continue intégrable sur $[0, +\infty[$. Le théorème de continuité sous signe intégral montre que g est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Remarquons que g est paire, donc il suffit de l'étudier sur $[0, +\infty[$, le changement de variable $u = tx$, montre que :

$$\forall x > 0, \ \ g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x \cos u}{x^2 + u^2} du.$$

La fonction $f : (x, u) \mapsto \dfrac{x \cos u}{x^2 + u^2}$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[^2$ avec

$$\forall (x, u) \in]0, +\infty[^2, \ \ \frac{\partial f}{\partial x}(x, u) = -\frac{(x^2 - u^2)}{(x^2 + u^2)^2} \cos u, \ \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, u) = \frac{2x(x^2 - 3u^2)}{(x^2 + u^2)^3} \cos u.$$

On a pour tout $(x, u) \in [a, b] \times]0, +\infty[$ ($0 < a < b$) :

$$|f(x, u)| \leq \frac{b}{a^2 + u^2}, \ \ \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, u) \right| \leq \frac{(b^2 + u^2)}{(a^2 + u^2)^2} = \varphi_2(u), \ \ \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, u) \right| \leq \frac{2b(b^2 + 3u^2)}{(a^2 + u^2)^3} = \varphi_3(u).$$

Les fonctions φ_1, φ_2 et φ_3 étant continues intégrables sur $[0, +\infty[$, le théorème de dérivation sous le signe intégral montre que g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et que

$$\forall x > 0, \ \ g''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2x(x^3 - 3u^2)}{(x^2 + u^2)^3} \cos .$$

D'autre part on obtient, par des intégrations par parties, $\forall x > 0$:

$$\begin{aligned} g(x) &= \left[\frac{x \sin u}{x^2 + u^2} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2xu}{(x^2 + u^2)^2} \sin u du \\ &= \left[-\frac{2xu}{(x^2 + u^2)^2} \cos u \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2x(x^2 - 3u^2)}{(x^2 + u^2)^3} \cos u du \end{aligned}$$

D'où $\forall x > 0, \quad g(x) = g''(x).$, g étant continue sur $[0, +\infty[$, donc $\forall x \geq 0$, $g(x) = \alpha e^{-x} + \beta e^{x}$, où α et β sont des constantes. La condition à l'origine permet de conclure que $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, et comme $\forall x > 0$, $|g(x)| \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$, donc g est bornée et par conséquent $\beta = 0$, et donc $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{\pi}{2} e^{-|x|}$.

La transformée de Fourier de la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{1+t^2} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos tx}{1+t^2} dt = \frac{1}{2\pi} g(x).$$

La transformée de Fourier de $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est donc $x \mapsto \frac{1}{2} e^{-|x|}$.

PROBLÈME : SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

Préliminaire

1. À l'aide d'une intégration parties on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_a^b g(t) \sin(\lambda t) dt &= \left[\frac{-g(t) \cos(\lambda t)}{\lambda} \right]_a^b + \int_a^b \frac{g'(t) \cos(\lambda t)}{\lambda} dt \\
&= \frac{-g(b) \cos \lambda a + g(0) \cos \lambda a}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_a^b g'(t) \cos(\lambda t) dt
\end{aligned}$$

Donc, pour tout $\lambda > 0$, on a :

$$\left| \int_a^b f(t) \sin(\lambda t) dt \right| \leq \frac{|g(b)| + |g(a)|}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_a^b |g'(t)| dt$$

d'où :

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b g(t) \sin(\lambda t) dt = 0.$$

2. On obtient à l'aide d'une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi (\beta t^2 + \alpha t) \cos(kt) dt &= \left[(\beta t^2 + \alpha t) \frac{\sin kt}{k} \right]_0^\pi - \frac{1}{k} \int_0^\pi (2\beta t + \alpha) \sin(kt) \\
&= 0 + \frac{1}{k} \left(\left[(2\beta t + \alpha) \frac{\cos(kt)}{k} \right]_0^\pi + \frac{1}{k} \int_0^\pi \cos(kt) dt \right) \\
&= \frac{1}{k^2} \left[(2\beta\pi + \alpha)(-1)^k - \alpha \right]
\end{aligned}$$

L'égalité est vérifiée pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, si, et seulement si, $2\pi\beta + \alpha = 0$ et $\alpha = -1$, ce qui donne $\beta = \frac{1}{2\pi}$.

3. Puisque $x \in]0, \pi]$, alors $e^{ix} \neq 1$ et par conséquent :

$$\begin{aligned}
\sum_{p=1}^n e^{ix} &= e^{ix} \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} \\
&= e^{ix} \frac{e^{in\frac{x}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}}} \frac{e^{-in\frac{x}{2}} - e^{in\frac{x}{2}}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}} = e^{i(n+1)\frac{x}{2}} \frac{\sin n\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{k=1}^n \cos(kx) = \mathrm{Re} \left(\sum_{p=1}^n e^{ipx} \right) = \cos(n+1) \frac{x}{2} \frac{\sin n\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \left(\sin nx \,\mathrm{cotan}\, \frac{x}{2} + \cos nx - 1 \right).$$

4. En utilisant ce qui précède, on obtient
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\int_0^{\pi}\left(-x+\frac{x^2}{2\pi}\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right)dx=I_1(n)+I_2(n)+I,$$
où $I_1(n)=\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\ \sin nx dx$, $I_2(n)=\displaystyle\int_0^{\pi} g(x)\cos nx dx$, $I=-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi}\left(-x+\frac{x^2}{2\pi}\right)dx=\dfrac{\pi^2}{6}$, où l'on a posé $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(-x+\dfrac{x^2}{2\pi}\right)\ \text{cotan}\,\dfrac{x}{2}$ et $g(x)=\dfrac{1}{2}\left(-x+\dfrac{x^2}{2\pi}\right)$.
Il est immédiat que, dans la question **1.**, on peut remplacer la fonction sinus par la fonction cosinus. La fonction g étant clairement de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to\infty} I_2(n)=0$.
La fonction f (telle qu'elle est écrite) n'est en fait pas définie en 0, mais par équivalence, on déduit facilement qu'elle est prolongeable par continuité avec $f(0)=-1$. Il reste à prouver qu'elle est de classe $\mathscr{C}^1$, c'est-à-dire (puisque c'est évident qu'elle l'est sur $]0,\pi]$) qu'elle est dérivable en 0 avec une dérivée continue en ce point. On a, pour tout $x\in]0,\pi]$:
$$f'(x)=\frac{\varphi(x)}{\sin^2\frac{x}{2}},\quad \text{avec}\qquad \varphi(x)=\frac{1}{4}\left(\frac{x}{\pi}-1\right)\sin x+\frac{x}{4}-\frac{x^2}{8\pi}.$$
Un petit développement limité donne $\varphi(x)=\dfrac{x^2}{8\pi}+o(x^2)$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=\dfrac{1}{2\pi}$. La fonction f est continue sur $[0,\pi]$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\pi]$ et sa dérivée admet une limite finie en 0, par le théorème "limite de la dérivée", f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} I_1(n)=0$ (question **1**).
Il reste donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=I=\frac{\pi^2}{6}$.

Première partie

1. Soit n un entier naturel. Pour tout $x\in]0,1]$, on a $|f(x)\ln(x)|\leq -\sup\limits_{x\in[0,1]}|f_n(x)|\ln(x)$, la fonction $x\mapsto\ln(x)$ étant intégrable sur $]0,1]$, donc il est de même de la fonction $x\mapsto f_n(x)\ln(x)$, donc u_n est bien définie.
2. La convergence uniforme de la suite de fonctions continues $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ assure la continuité de f sur $[0,1]$, donc $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ln(x)dx$ existe. On a, pour tout $n\in\mathbb{N}$,
$$\left|u_n-\int_0^1 f(x)\ln(x)dx\right|\leq\|f_n-f\|_\infty\int_0^1-\ln(x)dx,$$
donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=\displaystyle\int_0^1 f(x)\ln(x)dx$.
3. (a) Soit $x\in[0,1]$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 (terme général d'une série convergente), donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction nulle. L'étude de la fonction f_n, montre que
$$\|f_n\|_\infty=f\left(\frac{n}{n+1}\right)=\frac{n^{n+3}}{(1+n)^{n+1}},$$
qui tend vers $+\infty$, donc la convergence n'est pas uniforme. Mais elle converge uniformément sur tout intervalle $[0,a]$ pour tout $a\in[0,1[$.
   (b) On a $\displaystyle\int_0^1 x^n\ln(x)=\frac{-1}{(1+n)^2}$, donc $u_n=\dfrac{-n^3(3+2n)}{(2+n)^2(n+1)^2}$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=-2$. On remarque que $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx\neq\int_0^1\lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$, on retrouve une autre fois la convergence non uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers la fonction nulle sur $[0,1]$.
4. (a) La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction f définie par $f(x)=\begin{cases}1 & \text{si }\ x=1\\ 0 & \text{si }\ x\in[0,1[\end{cases}$. La convergence n'est pas uniforme sur $[0,1]$, car les f_n sont continues sur $[0,1]$, alors que f est discontinue en 1.

(b) On $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln(x)dx = \frac{-1}{(1+n)^2}$, donc la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$-\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(1+k)^2} = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 x^k \ln(x)dx = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right) \ln(x)dx = \int_0^1 \frac{\ln(x)dx}{1-x} - \int_0^1 \frac{x^{n+1}\ln(x)}{1-x}dx.$$

(les deux intégrales existent)

Pour tout entier naturel n et tout $x \in]0,1[$, on pose $g_n(x) = \dfrac{x^{n+1}\ln(x)}{1-x}$ et $g(x) = \dfrac{\ln(x)}{1-x}$. La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement $]0,1[$ vers la fonction nulle, de plus $\forall x \in]0,1[,\ \ |g_n(x)| \leq |g(x)|$. Donc d'après le théorème de convergence dominée on a $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+1}\ln(x)}{1-x}dx = 0$, et par suite

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x-1}dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Deuxième partie

1. On a $f_n(0) = (-1)^n$, donc $(f_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite. Si $x \in]0,1]$, $x-1 \in]-1,0[$ donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $]0,1]$. D'autre part $\|f_n\|_\infty = 1$, ce qui montre que la convergence ne peut pas être uniforme sur $]0,1]$. Ce pendant il y a une convergence uniforme sur tout intervalle $[a,1]$ où $0 < a < 1$.
2. Soit $\alpha \in]0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\left|\int_0^\alpha (x-1)^n \ln(x)dx\right| \leq \int_0^\alpha |\ln(x)|dx = \alpha - \alpha\ln(\alpha).$$

$\displaystyle\lim_{\alpha\to 0}(\alpha - \alpha\ln(\alpha)) = 0$, donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha_0 \in]0,1[$ tel que $\alpha_0 - \alpha_0\ln(\alpha_0) \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. Par conséquent $\left|u_n - \displaystyle\int_{\alpha_0}^1 (x-1)^n \ln(x)dx\right| = \left|\displaystyle\int_0^{\alpha_0} (x-1)^n \ln(x)dx\right| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.

D'autre part, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{\alpha_0}^1 (x-1)^n \ln(x)dx = 0$, car $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[\alpha_0, 1]$ vers la fonction nulle. Ainsi il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $\left|\displaystyle\int_{\alpha_0}^1 (x-1)^n \ln(x)dx\right| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$, donc pour tout $n \geq n_0$, on a

$$|u_n| \leq \left|u_n - \int_{\alpha_0}^1 (x-1)^n \ln(x)dx\right| + \left|\int_{\alpha_0}^1 (x-1)^n \ln(x)dx\right| \leq \varepsilon$$

D'où $\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 (x-1)^n \ln(x)dx = (-1)^{n+1} \int_0^1 -(1-x)^n \ln(x)dx = (-1)^{n+1}|u_n|$, donc $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est une série alternée, de plus $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0, alors la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ vérifiée le critère spécial des séries alternées, donc c'est une série convergente.
4. Une intégration par parties donne

$$\int_1^a (1-x)^n \ln(x)dx = \frac{1}{n+1}\left(\int_1^a \frac{(1-x)^{n+1}-1}{x}dx + \ln(a)(1-(1-a)^{n+1}\right)$$

Donc

$$|u_n| = \lim_{a\to 0} \int_1^a (1-x)^n \ln(x)dx = \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{(1-x)^{n+1}-1}{x}dx.$$

Comme $\dfrac{1-(1-x)^{n+1}}{x} = 1+(1-x)+\ldots+(1-x)^n$, on déduit que $|u_n| = \dfrac{1}{n+1}\left(1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n+1}\right)$. Pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$, $\dfrac{1}{k} \geq \dfrac{1}{n+1}$, donc $|u_n| \geq \dfrac{1}{(n+1)^2}(n+1) = \dfrac{1}{n+1}$, d'où la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ diverge, donc la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est semi-convergente.

5. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} + u_{2n+1} = \displaystyle\int_0^1 (x-1)^{2n} + (x-1)^{2n+1}\ln(x)dx = \int_0^1 (1-x)^{2n} x\ln(x)dx$, donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{p}(u_{2n}+u_{2n+1}) = \int_0^1 x\ln(x)\sum_{n=0}^{p}(1-x)^{2n}dx$. Pour tout $x \in]0,1]$ et tout $p \in \mathbb{N}$, on pose $g_p(x) = x\ln(x)\displaystyle\sum_{n=0}^{p}(1-x)^{2n}$ et $g(x) = \dfrac{\ln(x)}{2-x}$. La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers g sur $]0,1]$ et $\forall x \in]0,1]$, $|g_p(x)| \leq |g(x)| = -g(x)$, g étant continue intégrable sur $]0,1]$, alors d'après le théorème de convergence dominée, on a :

$$\lim_{p\to\infty}\int_0^1 g_p(x)dx = \int_0^1 g(x)dx,$$

c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{2-x}dx$.

6. On vérifie d'abord que les intégrales $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(x)}{1-x}$ et $J = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\ln(x)}{1-x}$. On pose $x = 1-t$, on obtient donc :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(x)}{1-x}dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\ln(1-t)}{t}dt = [\ln(t)\ln(1-t)]_{\frac{1}{2}}^{1} + \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(t)}{1-t} = -(\ln 2)^2 + \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(t)}{1-t}.$$

D'où $I = J - (\ln 2)^2$, donc d'après la relation de Chasles et la question $I.4.c)$ on obtient

$$I = -\frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}(\ln 2)^2.$$

D'autre part, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{2-x}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(2x)}{1-x}dx = I + \ln 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1-x} = \frac{1}{2}(\ln 2)^2 - \frac{\pi^2}{12}.$$

7. (a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0,1]$, on a $|h_n(x)| \leq \|h_n\|_\infty = \dfrac{1}{n2^{n+1}}$, donc la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} h_n$ converge normalement et donc uniformément sur $[0,1]$.

   (b) D'après ce qui précède, on peut intégrer terme à terme la série précédente :

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} h_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 h_n(x)dx.$$

   Comme $\forall x \in]0,1]$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} h_n(x) = \frac{\ln(x)}{2-x}$, on conclut que :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2 2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2 2^{n+1}} = -\int_0^1 \frac{\ln(x)}{2-x}dx = \frac{\pi^2}{12} - \frac{(\ln 2)^2}{2}.$$

•••••••••••