Corrigé du devoir surveillé $n°6$
M.Tarqi

1. (a) La fonction $h : t \mapsto \dfrac{t\sin(tu)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $[0,1[$, et en 1 $h(t) = O\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right)$ et comme l'application $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur $[0,1[$, on conclut par théorème de comparaison que h est intégrable sur $[0,1[$. Donc g est bien définie sur $\mathbb{R}$.

(b) Pour tout $a \in]0,1[$, $\displaystyle\int_a^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt = \left[-\sqrt{1-t^2}\right]_a^1 = \sqrt{1-a^2}$. Ainsi $\sqrt{1-a^2} = \dfrac{1}{u}$ si, et seulement si, $a = \sqrt{1-\dfrac{1}{u}}$, donc $\alpha_u = \sqrt{1-\dfrac{1}{u}}$ convient, car il appartient à $]0,1[$ ($u > 1$).

(c) pour tout $t \in [0,1[$, $\left(\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right) = \dfrac{1}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}$ d'où :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\alpha_u} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\sin(tu)dt &= \left[\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\left(\frac{\cos(tu)}{u}\right)\right]_0^{\alpha_u} - \int_0^{\alpha_u} \frac{1}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}\left(-\frac{\cos(tu)}{u}\right)dt \\
&= \frac{\alpha_u}{\sqrt{1-\alpha_u^2}}\left(\frac{\cos(\alpha_u u)}{u}\right) + \int_0^{\alpha_u} \frac{1}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\cos(tu)}{u}\right)dt
\end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $u > 1$,

$$\begin{aligned}
|g(u)| &\leq \left|\int_0^{\alpha_u} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\sin(tu)dt\right| + \left|\int_{\alpha_u}^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\sin(tu)dt\right| \\
&\leq \left|\int_0^{\alpha_u} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\sin(tu)dt\right| + \left|\int_{\alpha_u}^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\sin(tu)dt\right| \\
&\leq \frac{\alpha_u}{\sqrt{1-\alpha_u^2}}\left(\frac{\cos(\alpha_u u)}{u}\right) + \int_0^{\alpha_u} \frac{1}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\cos(tu)}{u}\right)dt + \frac{1}{\sqrt{u}}
\end{aligned}$$

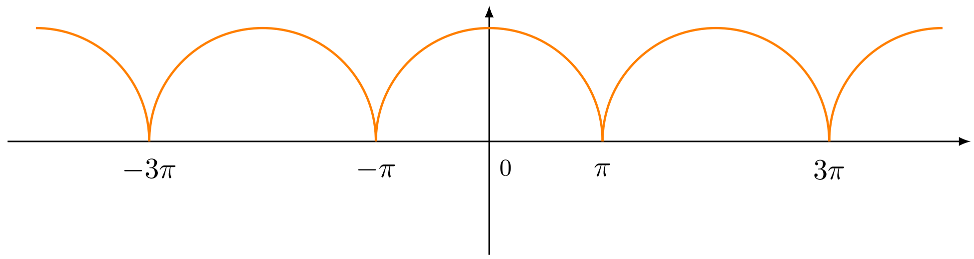
Or $\alpha_u = \sqrt{1-\dfrac{1}{u}}$, donc $|g(u)| \leq \left|\dfrac{\alpha_u}{\sqrt{\frac{1}{u}}}(\dfrac{1}{u})\right| + \left|\displaystyle\int_0^{\alpha_u} \frac{1}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}(\frac{1}{u})dt\right| + \dfrac{1}{\sqrt{u}}$, d'où

$$|g(u)| \leq \frac{\alpha_u}{\sqrt{\frac{1}{u}}}\left(\frac{1}{u}\right) + \frac{\alpha_u}{\sqrt{\frac{1}{u}}}\left(\frac{1}{u}\right) + \frac{1}{\sqrt{u}}.$$

Et comme $u < 1$, on a finalement $|g(u)| \leq \dfrac{1}{\sqrt{u}} + \dfrac{1}{\sqrt{u}} + \dfrac{1}{\sqrt{u}} = \dfrac{3}{\sqrt{u}}$.

2. (a) Le cercle de centre O et de rayon π a pour équation $x^2 + y^2 = \pi^2$. Comme y est positif, on en déduit que $y = \sqrt{\pi^2 - x^2}$. Donc $\forall x \in]-\pi,\pi]$, $f(x) = \sqrt{\pi^2 - x^2}$.

(b) Le théorème de Dirichlet ne s'applique pas car la fonction n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ à cause de $\displaystyle\lim_{x\to\pi^-} f'(x) = +\infty$



La courbe représentative de f

3. (a) La fonction étant paire on a pour tout $n \geq 1$, $b_n = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)dt$.

(b) Effectuons une intégration par partie sur a_n :

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left[f(t)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{t}{\sqrt{\pi^2-t^2}}\frac{\sin(nt)}{n}dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{t}{\sqrt{\pi^2-t^2}}\frac{\sin(nt)}{n}dt$$

Effectuons ensuite un changement de variables $t = \pi x$:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{1}\frac{t}{\sqrt{\pi^2-(\pi x)^2}}\frac{\sin(n\pi x)}{n}\pi dx = \frac{2}{n}\int_0^{1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\sin(n\pi x)dx$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{2}{n}g(\pi n)$.

(c) Posons u_n définie par $u_n(x) = a_n\cos(nx)$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout entier $n \geq 1$,

$$|u_n| \leq \frac{2}{n}\frac{3}{\sqrt{\pi n}} = \frac{6}{\sqrt{\pi}n^{\frac{3}{2}}}$$

d'après le 1.(c), et comme la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge, la série de Fourier converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Ce résultat ne contredit pas le 2.(b) car le théorème de Dirichlet n'est qu'une condition suffisante pour que la série converge normalement sur $\mathbb{R}$. De plus cette convergence normale ne donne pas vers quoi cette série converge.

(d) Soit $S_n(f) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$. D'une part f est continue sur $\mathbb{R}$: en effet f est 2π-périodique, continue sur $]-\pi,\pi[$ et $f(\pi^+) = f(\pi^-) = 0$ d'où f est continue sur $\mathbb{R}$. On a donc d'après le théorème de Parseval, la convergence en moyenne quadratique de $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ vers f, soit $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\|S_n(f)-f\|_2 = 0$.

D'autre part on a d'après le 4.(a), la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction F, donc la suite $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers F. La fonction F est 2π-périodique (transfert par convergence simple) et F est continue sur $\mathbb{R}$ (transfert par convergence uniforme de la continuité). On peut donc considérer dans l'espace $\mathscr{C}_{2\pi}$:

$$\|S_n(f)-F\|_2 \leq \|S_n(f)-F\|_\infty$$

On en déduit donc que la suite $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne quadratique vers F. Par unicité de la limite, on a $F = f$.

PROBLÈME : SÉRIES ENTIÈRES ET TOPOLOGIE DE $l^1(\mathbb{R})$

I.QUESTIONS PRÉLIMINAIRES

1. Pour toute $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $l^1(\mathbb{R})$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|a_n| \leq \|a\|$. Ainsi si $\|a\| = 0$, alors $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $a = 0$.
Pour a et b dans $l^1(\mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}$, $|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n|$ et par sommation, nous obtenons l'inégalité triangulaire $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$.
Enfin il est clair que si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $a \in l^1(\mathbb{R})$, $\|\lambda a\| \leq |\lambda|\|a\|$.
En conclusion, $\|.\|$ est une norme dans $l^1(\mathbb{R})$.
Soit $(a^k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $(l^1(\mathbb{R}), \|.\|)$ avec $a^k = (a^k(n))_{n\in\mathbb{N}}$. Donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists k_0 \in \mathbb{N},\ \ \forall k \geq k_0,\ \ \|a^{k+p} - a^k\| \leq \varepsilon,$$

ou encore

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists k_0 \in \mathbb{N},\ \ \forall k \geq k_0,\ \ \sum_{n=0}^{\infty} |a^{k+p}(n) - a^k(n)| \leq \varepsilon,$$

Si n est fixé, l'inégalité $|a^{k+p}(n) - a^k(n)| \leq \|a^{k+p} - a^k\|$ montre que la suite $(a^k(n))_{k\geq 1}$ est de Cauchy dans $(\mathbb{R}, |.|)$, donc convergente.
Posons $a_n = \lim\limits_{k\to\infty} a^k(n)$ et $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrons que $a \in l^1(\mathbb{R})$ et que $\|a^k - a\|$ tend vers 0 quand k tend vers l'infini, ce qui permet de conclure. Soit N un entier naturel et $k \geq k_0$, alors

$$\sum_{n=0}^{N} |a^{k+p}(n) - a^k(n)| \leq \varepsilon$$

et si on fait tendre p vers l'infini, on obtient $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} |a(n) - a^k(n)| \leq \varepsilon$ pour tout $k \geq k_0$, cela montre que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} |a(n) - a^k(n)|$ converge, et comme $a^k \in l^1(\mathbb{R})$, il est de même de a, et alors $\forall k \geq k_0$, $\|a^k - a\| \leq \varepsilon$.

2. Soit $a \in l^1(\mathbb{R})$, alors $\forall x \in [-1, 1]$, $|a_n x^n| \leq |a_n|$. Donc la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ converge normalement et donc uniformément sur $[-1, 1]$, et comme les applications $x \mapsto a_n x^n$ sont continues, alors l'application $f_a : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est continue sur $[-1, 1]$.

II- FORMES LINÉAIRES CONTINUES SUR $(l^1(\mathbb{R}), \|.\|)$

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de nombres réels, alors $\forall a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{R})$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|a_n u_n| \leq M|a_n|$$

où $M = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$. Ainsi la série $\sum a_n u_n$ est absolument convergente, donc convergente et sa somme $\varphi(a) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n$ est alors bien défini dans $\mathbb{R}$.
Comme il est evident que φ est linéaire, il reste à montrer que φ est continue.

$$\forall a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{R}),\ \ \left|\sum_{k=0}^{N} a_k u_k\right| \leq \sum_{k=0}^{N} |a_k||u_k|$$

et donc
$$|\varphi(a)| \leq M\|a\|$$
Cette inégalité assure la continuité de φ et montre aussi que $\|\varphi\| \leq M$.
Soit a la suite dont tous les termes sont nuls, sauf le $n+1$-ième, lequel vaut 1, alors $\|a\| = 1$ et on peut écrire
$$|\varphi(a)| = |u_n| \leq \|\varphi\|\|a\| = \|\varphi\|$$
et donc $\|\varphi\| \geq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n| = M$, d'où $\|\varphi\| = M$.

2. Soit φ une forme linéaire continue sur $(l^1(\mathbb{R}), \|.\|)$. Notons e_n la suite dont tous les termes sont nuls sauf celui d'indice $n+1$ qui vaut 1. Pour tout $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{R})$ nous avons :
$$\left\| a - \sum_{k=0}^{n} a_k e_k \right\| = \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|$$
terme qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Comme φ est continue, il vient alors
$$\varphi(a) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k e_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi(e_k)$$
ceci montre que la série $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} a_k\varphi(e_k)$ converge et a pour somme $\varphi(a)$. Posons donc $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $u_n = \varphi(e_n)$, on a :
$$|u_n| = |\varphi(e_n)| \leq \|\varphi\|\|e_n\| = \|\varphi\|$$
donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ répond bien à la question.
<u>L'UNICITÉ</u> : Si $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n u_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \varphi(e_n)$, alors
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(u_n - \varphi(e_n)) = 0$$
et ceci pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{R})$, en particulier pour $a = e_k$, on trouve $u_k - \varphi(e_k) = 0$ et donc $u = (\varphi(e_n))_{n\in\mathbb{N}}$ d'où l'unicité.

III. SUITES DE $(l^1(\mathbb{R}), \|.\|)$. CONVERGENCES

1. Soit $a = \lim\limits_{k\to\infty} a^k$ dans $(l^1(\mathbb{R}), \|.\|)$. Posons $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout $x \in [-1, 1]$, on a :
$$\begin{aligned} |f_k(x) - f_a(x)| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} (a^k(n) - a_n)x^n \right| \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |a^k(n) - a_n||x^n| \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |a^k(n) - a_n| \end{aligned}$$
Ainsi $\|f_k - f\|_\infty \leq \|a^k - a\|$ et par conséquent la suite de fonctions $(f_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[-1, 1]$.

2. La suite de fonctions $(f_k)_{k\geq 1}$ est définie sur $[-1,1]$ par $f_k(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{k} \frac{\sin n}{n} x^n$.

Si $x \in [0,1]$, on pose : $A_n = \sin 1 + \sin 2 + \ldots + \sin n$, on a $A_n - A_{n-1} = \sin n$ avec $A_0 = 0$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
f_{k+p}(x) - f_k(x) &= \sum_{n=k+1}^{n+p} (A_n - A_{n-1})\frac{x^n}{n} \\
&= \sum_{n=k+1}^{n+p} \frac{A_n x^n}{n} - \sum_{n=k}^{n+p-1} \frac{A_n x^{n+1}}{n+1} \\
&= -\frac{A_k x^{k+1}}{k+1} + \frac{A_{n+p} x^{k+p}}{k+p} + \sum_{n=k+1}^{n+p-1} A_n\left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)
\end{aligned}$$

Comme $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} e^{ip} = \frac{e^i(1-e^{in})}{1-e^i}$, on a $|A_n| \leq \dfrac{2}{|1-e^i|} = \dfrac{1}{\sin\frac{1}{2}} = M$. D'où

$$\begin{aligned}
|f_{k+p}(x) - f_k(x)| &\leq M\left(\frac{x^{k+1}}{k+1} + \frac{x^{k+p}}{k+p}\right) + \sum_{n=k+1}^{n+p-1} \left|\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right| \\
&\leq M\left(\frac{x^{k+1}}{k+1} + \frac{x^{k+p}}{k+p}\right) + \sum_{n=k+1}^{n+p-1} \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right) \\
&\leq M\frac{2x^{k+1}}{k+1} \leq \frac{2M}{k+1}.
\end{aligned}$$

Donc la suite de fonctions $(f_k)_{k\geq 1}$ converge uniformément sur $[0,1]$.

Si $x \in [-1,0]$, on écrit $f_k(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{k} (-1)^n \frac{\sin n}{n} t^n$ avec $t \in [0,1]$($t = -x$). Considérons comme précédemment $B_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} (-1)^p \sin p$, on a, comme précédemment, $|B_n| \leq \dfrac{2}{|1-e^{i(1+\pi)}|} = N$ et donc $|f_{k+p}(x) - f_k(x)| \leq \dfrac{2N}{k+1}$.

Ainsi $\forall x \in [-1,1]$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $|f_{k+p}(x) - f_k(x)| \leq \dfrac{2}{k+1}\max\{M,N\}$. Ceci montre que la suite de fonction $(f_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[-1,1]$ vers la fonction f définie par :

$$\forall x \in [-1,1], \quad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} x^n.$$

Si la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge dans $(l^1(\mathbb{R}), \|.\|)$ vers $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors $(f_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ serait uniformément convergente sur $[-1,1]$ vers $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Ainsi, par unicité, $\forall x \in [-1,1]$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} x^n$.

Cela implique $a_0 = 0$ et $\forall n \geq 1, \quad a_n = \dfrac{\sin n}{n}$. Or la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left|\frac{\sin n}{n}\right|$ diverge, en effet, si on suppose que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left|\frac{\sin n}{n}\right|$ converge, on a $\left|\frac{\sin n}{n}\right| \geq \frac{\sin^2 n}{n} = \frac{1-\cos 2n}{2n}$ donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{\sin^2 n}{n}$ converge. Mais $\frac{\sin^2 n}{n} = \frac{1-\cos 2n}{2n}$, et comme on sait que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{\cos 2n}{n}$ converge (voir TD), donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n}$ converge ce qui est absurde.

En conclusion, la suite $(a^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas dans $(l^1(\mathbb{R}), \|.\|)$.

3. D'après l'hypothèse, on a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists k_0 \in \mathbb{N},\ \ \forall k \geq k_0,\ \ \forall x \in [-1,1],\ \ \left|\sum_{n=0}^{\infty} a^k(n)x^n\right| \leq \varepsilon$$

En particulier pour $x = 0$, on a $|a^k(0)| \leq \varepsilon$ dés que $k \geq k_0$, ce qui montre que $\lim_{k\to\infty} a^k(0) = 0$. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim_{k\to\infty} a^k(n) = 0$. En effet, la propriété est vraie si $n = 0$, supposons qu'elle est vraie pour l'ordre $n-1$ et montrons la pour l'ordre n. Soit $\varphi_k(x) = \sum_{p=0}^{n-1} a^k(p)x^p$, pour $x \in [-1,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\|\varphi_k\|_\infty \leq \sum_{p=0}^{n-1} |a^k(p)|$$

ce qui entraîne $\lim_{k\to\infty} \|\varphi_k\|_\infty = 0$. Soit $x \in [-1,1]$,

$$\left|\sum_{p=n}^{\infty} a^k(p)x^p\right| = \left|\sum_{p=0}^{\infty} a^k(p)x^p - \sum_{p=0}^{n-1} a^k(p)x^p\right| \leq \|\varphi_k\|_\infty + \left|\sum_{p=0}^{\infty} a^k(p)x^p\right|.$$

ce qui montre que :

$$(*)\ \ \forall \varepsilon > 0,\ \ \exists k_0 \in \mathbb{N},\ \ \forall k \geq k_0,\ \ \forall x \in [-1,1],\ \ \left|\sum_{p=n}^{\infty} a^k(p)x^p\right| \leq \varepsilon$$

Ainsi $\forall x \in [-1,1]$, $|a^k(n)x^n| = \sum\limits_{p=n}^{\infty} a^k(p)x^p - \sum\limits_{p=n+1}^{\infty} a^k(p)x^p$. On a $|a^k(p)| \leq M$, donc

$$\forall x \in]-1,1[,\ \left|\sum_{p=n+1}^{\infty} a^k(p)x^p\right| \leq M\sum_{p=n+1}^{\infty} |x|^p = M\frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}$$

si on se limite à $x \in [0,1[$, on obtient :

$$\left|\sum_{p=n+1}^{\infty} a^k(p)x^p\right| \leq M\frac{x^{n+1}}{1-x}$$

Ainsi pour $x \in [0,1[$ et en utilisant $(*)$

$$-\varepsilon - M\frac{x^{n+1}}{1-x} \leq a^k(n)x^n \leq \varepsilon + M\frac{x^{n+1}}{1-x}$$

En prenant $x = \varepsilon^{\frac{1}{2n}}$, ε étant supposé dans $]0,1[$, on obtient

$$|a^k(n)| \leq \sqrt{\varepsilon} + M\frac{\varepsilon^{\frac{1}{2n}}}{1-\varepsilon^{\frac{1}{2n}}}$$

et ceci pour tout $k \geq k_0$. Ainsi on bien $\lim\limits_{k\to\infty} a^k(n) = 0$.

4. Montrons d'abord que $\forall n \in \mathbb{N}$, la suite $(a^k(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathbb{R}$. Si $k=0$, on a :

$$|a^{k+p}(0) - a^k(0)| \leq \|f_{k+p} - f_k\|_\infty$$

donc $(a^k(0))_{k\in\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy dans $(\mathbb{R}, |.|)$, donc converge. Montrons par récurrence que sur $n \in \mathbb{N}$ que la suite $(a^k(n))_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge.
Supposons donc $(a^k(n-1))_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge et montrons que $(a^k(n))_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge. $\forall x \in [0,1[$, on a ;

$$\begin{aligned} |(a^{k+p}(n) - a^k(n))x^n| &\leq \left|\sum_{j=n}^{\infty}(a^{k+p}(j) - a^k(j))x^j\right| + \left|\sum_{j=n+1}^{\infty}(a^{k+p}(j) - a^k(j))x^j\right| \\ &\leq 2\|\alpha\|\frac{x^{n+1}}{1-x} + \left|\sum_{j=n+1}^{\infty}(a^{k+p}(j) - a^k(j))x^j\right| \end{aligned}$$

et on conclut usuellement comme cela a été fait en 3. Soit $a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a^k(n)$ et $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Montrons que $a \in l^1(\mathbb{R})$ et $a = \lim\limits_{k\to\infty} a^k$. On a : $\forall (k,n)$, $|a^k(n)| \leq \alpha_n$ donc quand k ten vers l'infini, on obtient $|a_n| \leq \alpha_n$ et comme la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n$ converge, il en est de même de la série $\sum |a_n|$ donc $a \in l^1(\mathbb{R})$. D'autre part, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$\|a^k - a\| = \sum_{n=0}^{\infty}|a^k(n) - a_n| \leq 2\sum_{n=N+1}^{\infty}\alpha_n + \sum_{n=0}^{N}|a^k(n) - a_n|$$

et ceci pour tout $\in \mathbb{N}$.
Soit alors $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $2\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}\alpha_n \leq \varepsilon$. Donc

$$\|a^k - a\| \leq \varepsilon + \sum_{n=0}^{N}|a^k(n) - a_n|,$$

et comme chaque suite $(a^k(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ ($n \in [\![0,N]\!]$) converge vers a_n, il existe donc $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geq k_0$, $\sum\limits_{n=0}^{N}|a^k(n) - a_n| \leq \varepsilon$ et donc $\forall k \geq k_0$, $\|a^k - a\| \leq 2\varepsilon$, donc $a = \lim\limits_{k\to\infty} a^k$ dans $(l^1(\mathbb{R}), \|.\|)$.

IV : APPLICATION LINÉAIRE $\mathscr{C}^0$ DE $l^1(\mathbb{R})$ DANS $l^1(\mathbb{R})$

1. On sait, d'après le cours, que si $a \in l^1(\mathbb{R})$ et $x \in l^1(\mathbb{R})$ alors la suite $a * x$ est dans $l^1(\mathbb{R})$, et que

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(a*x)_n.$$

2. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|(a * x)_n| \leq \sum_{p+q=n} |a_p||x_q|$ et donc $\|a * x\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| = \|a\|\|x\|$. Ceci montre que l'application linéaire ψ_a est continue et que $\|\psi_a\| \leq \|a\|$.
En prenant $x = (1, 0, 0, ...)$, on a $\psi_a(x) = a$, d'où $\|a\| = \|\psi_a(x)\| \leq \|\psi_a\|.\|x\|$ et $\|x\| = 1$, d'où $\|\psi_a\| = \|a\|$.

IV : EXEMPLES DE SUITES $l^1(\mathbb{R})$

1. Pour $x \in [0, 1[$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, il est clair que f est croissante sur $[0, 1[$, donc si $N \in \mathbb{N}$, nous avons : $\sum_{n=0}^{N} a_n x^n \leq f(x)$, et en faisant tendre x vers 1, il vient :

$$0 \leq \sum_{n=0}^{N} a_n \leq \lim_{x \to 1^-} f(x) = L$$

Ceci montre que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ converge, donc $a \in l^1(\mathbb{R})$, car la suite a est à termes positifs.
L'hypothèse $a_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est nécessaire, en effet, si $a_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n x^n$ converge sur $]-1, 1[$ et a pour somme $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$, qui a une limite en $x = 1$, mais la suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}} \notin l^1(\mathbb{R})$.

2. Pour $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$, on pose $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Soit $r \in]0, 1[$, on a pour tout θ réel, $f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta}$. L'application $g : \theta \mapsto f(re^{i\theta})$ est continue et 2π-périodique, donc d'après le théorème de Parseval, nous avons :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(\theta)|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

Mais $|f(z)| \leq M$ pour tout $|z| < 1$, donc

$$\forall r \in [0, 1[, \ \ \forall N \in \mathbb{N}, \ \sum_{n=0}^{N} |a_n|^2 r^{2n} \leq M^2$$

Si on fait tendre r vers 1, on obtient

$$\forall N \in \mathbb{N}, \ \sum_{n=0}^{N} |a_n|^2 \leq M^2$$

ce qui montre que la suite $(|a_n|^2)_{n \in \mathbb{N}}$ est dans $l^1(\mathbb{R})$.

3. Comme pour tout réel $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a $\sin x \geq \dfrac{2}{\pi} x$, on obtient donc :

$$a_n \geq \left(\frac{2}{\pi}\right)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n dx = \frac{\pi}{2(n+1)},$$

et par conséquent $a \notin l^1(\mathbb{R})$.

4. On a $\forall n \in \mathbb{N},\ \lim\limits_{|x|\to+\infty}(1+x^2)[e^{e^{|x|}}x^2n] = 0$, donc il existe un réel $M_n > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ 0 \leq e^{e^{|x|}}x^2n \leq \frac{M_n}{1+x^2},$$

donc a_n existe dans $\mathbb{R}$.

Soit $N \in \mathbb{N}$, on a $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k = 2\int_0^{+\infty} e^{-e^x}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}}{(2k)!}\right)dx$ La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,+\infty[$, $f_n(x) = e^{-e^x}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}}{(2k)!}\right)$ converge simplement vers $f : x \mapsto e^{-e^x}\operatorname{ch} x$ et dominé par la fonction intégrable $x \mapsto e^{-e^x}\operatorname{ch} x$, donc d'après le théorème de convergence dominé la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $2\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-e^x}\operatorname{ch} x dx$, autrement dit $a \in l^1(\mathbb{R})$ et

$$\|a\| = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = 2\int_0^{+\infty} e^{-e^x}\operatorname{ch} x dx.$$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$ se prolonge par continuité en 1, donc on peut écrire :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \int_0^1 \sin\pi x\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)dx$$

La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie ainsi définie converge simplement vers $\varphi : x \mapsto \dfrac{\sin\pi x}{1-x}$ et dominé par la fonction intégrable $\varphi : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin\pi x}{1-x} & \text{si } \ x \in [0,1[\\ \pi \ \text{ si } \ x = 1 \end{cases}$, donc d'après le théorème de convergence dominé la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin\pi x}{1-x}dx$, autrement dit $a \in l^1(\mathbb{R})$ et

$$\|a\| = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \int_0^1 \frac{\sin\pi x}{1-x}dx.$$

On a $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin\pi x}{1-x}dx = \int_0^1 \frac{\sin\pi t}{t}dt = \int_0^\pi \frac{\sin u}{u}du$ (on a posé $x = 1-t$ puis $u = \pi t$). Or pout $u \in [0,\pi]$ on peut montrer que $\sin u \geq u - \dfrac{u^2}{\pi}$ et donc

$$\|a\| = \int_0^\pi \frac{\sin u}{u}du \geq \int_0^\pi \left(1 - \frac{u}{\pi}\right)du = \frac{\pi}{2}.$$

• • • • • • • • • • •