Devoir surveillé $n°2$
Correction

• • • • • • • • •

EXERCICE

1. On remarque que C est compact. En effet, C est clairement fermé. De plus, pour $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}_+^n$, on a $\|(x_1,\dots,x_n)\|_1 = x_1+\dots+x_n \leq 1$, et donc C est borné. C'est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$ et f, qui est continue sur C, admet un maximum global sur C, atteint en a. De plus, puisque $f(x_1,\dots,x_n)$ s'annule si un des x_i est nul, il est clair que $a \in]0,+\infty[^n$.
2. Posons $g(x) = \alpha_1x_1+\dots+\alpha_nx_n$. Par le théorème des multiplicateurs de Lagrange, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, on a
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lambda\frac{\partial g}{\partial x_i}(a) = \lambda\alpha_i.$$
Or,
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \alpha_i\frac{f(a)}{a_i}.$$
Puisque $f(a)\neq 0$, on a $\lambda\neq 0$ et tous les a_i sont égaux (à $\dfrac{f(a)}{\lambda}$). Mais, puisque $\alpha_1a_1+\dots+\alpha_na_n = 1$, on en déduit que f atteint son maximum sur C en le point $(1,\dots,1)$. Ce maximum vaut 1. D'où $\forall x\in C, x_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n}\leq 1$.
3. La question précédente prouve que, si $(x_1,\dots,x_n)\in[0,+\infty[^n$ satisfait $\alpha_1x_1+\dots+\alpha_nx_n = 1$, alors
$$\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} \leq 1 = \sum_{i=1}^n \alpha_ix_i.$$
Dans le cas général, on se ramène à ceci en posant
$$y_i = \frac{x_i}{\sum\limits_{i=1}^n \alpha_ix_i},$$
qui vérifie $\alpha_1y_1+\dots+\alpha_ny_n = 1$. De $\prod\limits_{i=1}^n y_i^{\alpha_i}\leq 1$, on déduit l'inégalité demandée.
Il y a égalité si, et seulement si, $f\left(\dfrac{x}{\sum\limits_{i=1}^n\alpha_ix_i}\right) = 1$ ou encore si, et seulement si, $x_1 = x_2 = ... = x_n$.
4. On pose $X = yz, Y = xz, Z = xy$ et on choisit $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{3}$. D'après ce qui précède $(XYZ)^{\frac{1}{3}} \leq \dfrac{1}{3}(X+Y+Z)$, inégalité qui s'écrit encore sous la forme $V^{\frac{2}{3}} \leq \dfrac{S}{6}$ avec $V = xyz$ et $2(xy+xz+yz)$. On vérifiera que le minimum de $S(x,y,z) = 2(xy+xz+yz)$ est atteint pour : $x = y = z = V^{\frac{1}{3}}$, ce qui entraîne aussi que, à volume fixé, le parallélépipède de surface minimal est le cube.

PROBLÈME

Partie I

1. L'application $f_k : (x_1,x_2,...,x_n)\mapsto x_k$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et on a $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2, \forall x\in\mathbb{R}^n, \dfrac{\partial^2 f_k}{\partial x_i\partial x_j}(x) = 0$.
Donc $f_k\in\mathscr{N}$. On en déduit que $f_k\circ u = u_k$ appartient à $\mathscr{N}$.
2. a) On a, pour tout $x\in\mathbb{R}^n$, $J_x(f\circ u) = J_{u(x)}f.J_xu$, on obtient donc par identification des coefficients :
$$\frac{\partial(f\circ u)}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^n\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\circ u\right)\frac{\partial u_k}{\partial x_i}.$$

b) On dérivant l'expression précédente par rapport à x_j, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2(f\circ u)}{\partial x_i\partial x_j} &= \sum_{k=1}^n\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\circ u\right)\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{k=1}^n\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\circ u\right)\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\\ &= \sum_{k=1}^n\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\circ u\right)\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_j}\frac{\partial^2 f}{\partial x_k\partial x_l}\circ u\end{aligned}$$

c) Si $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, M_{ij} désigne l'élément de la ième ligne et la jème colonne de la matrice M. Pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, on a :

$$\begin{aligned}(H_x(f\circ u))_{ij} &= \sum_{k=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_k}(u(x))(H_x(u_k))_{ij}+\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n(J_x(u))_{ki}(H_{u(x)}(f))_{kl}(J_x(u))_{ij}\\ &= \sum_{k=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_k}(u(x))(H_x(u_k))_{ij}+({}^tJ_x(u)H_{u(x)}J_x(u))_{ij}.\end{aligned}$$

D'où $H_x(f\circ u)={}^tJ_x(u)H_{u(x)}(f)J_x(u)+\displaystyle\sum_{k=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_k}(u(x))H_x(u_k)$.

3. a) Il est clair que l'application $(V,W)\mapsto\mathrm{tr}(VW)$ est bilinéaire. De plus elle est symétrique, puisque $\mathrm{tr}(VW)=\mathrm{tr}(WV)$. Enfin si $V=(v_{ij})_{1\le i,j\le n}\in\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(V^2)=\sum\limits_{i,j}v_{ij}^2$, donc $\mathrm{tr}(V^2)\ge 0$ et $\mathrm{tr}(V^2)=0$ si, et seulement si, $v_{ij}=0$, pour tout (i,j). Donc la forme est définie positive et par conséquent c'est un produit scalaire sur $\mathscr{S}_n$.

   b) Si $V_2=0$, on a $V_2=0V_1$. Si $V_2\neq 0$, la condition $\forall S\in\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(V_1S)=0\Rightarrow\mathrm{tr}(V_2S)=0$ est équivalent à dire que $(\mathbb{R}V_1)^\perp\subset(\mathbb{R}V_2)^\perp$. Comme $(\mathbb{R}V_1)^\perp$ et $(\mathbb{R}V_2)^\perp$ sont des hyperplans, alors $(\mathbb{R}V_1)^\perp=(\mathbb{R}V_2)^\perp$ et donc $\mathbb{R}V_1\mathbb{R}V_2$, d'où il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $V_2=\lambda V_1$.

4. a) On a $\mathrm{tr}(AH_x(f)=\displaystyle\sum_{i=1}^n(AH_x(f))_{ii}=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}(H_x(f))_{ji}=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x)=Df(x)$.

   b) D'après la question 2.c), on a : $H_x(f\circ u)={}^tJ_x(u)H_{u(x)}(f)J_x(u)+\displaystyle\sum_{k=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_k}(u(x))H_x(u_k)$, et donc $AH_x(f\circ u)=A{}^tJ_x(u)H_{u(x)}(f)J_x(u)+\displaystyle\sum_{k=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_k}(u(x))AH_x(u_k)$. D'où pour tout $x\in\mathbb{R}^n$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}D(f\circ u)(x) &= \mathrm{tr}(AH_x(f\circ u))\\ &= \mathrm{tr}(A{}^tJ_x(u)H_{u(x)}(f)J_x(u))+\sum_{k=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_k}(u(x))\,\mathrm{tr}(AH_x(u_k))\\ &= \mathrm{tr}(A{}^tJ_x(u)H_{u(x)}(f)J_x(u))+\sum_{k=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_k}(u(x))Du_k(x)\\ &= \mathrm{tr}(A{}^tJ_x(u)H_{u(x)}(f)J_x(u)).\end{aligned}$$

car $Du_k(x)=0$ ($u_k\in\mathscr{N}$).

5. a) Pour tout $x\in\mathbb{R}^n$, on a $q(x)=\displaystyle\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n s_{ij}x_ix_j=\sum_{i=1}^n s_{ii}x_i^2+2\sum_{1\le i<j\le n}s_{ij}x_ix_j$. Donc $\dfrac{\partial^2 q}{\partial x_i\partial x_j}=2s_{ij}$ et par suite $H_x(q)=2S$.

   b) Puisque q conserve $\mathscr{N}$, donc $q\in\mathscr{N}\Rightarrow q\circ u\in\mathscr{N}$. Ce qui se traduit par $\mathrm{tr}(AH_x(q))=0\Rightarrow\mathrm{tr}(AH_{u(x)}(q))=\mathrm{tr}(A{}^tJ_x(u)H_{u(x)}(q)J_x(u))=0$. Or $H_x(q)=H_{u(x)}(q)=2S$, donc

$$\forall S\in\mathscr{S}_n(\mathbb{R}),\ \ \mathrm{tr}(AS)=0\Rightarrow\mathrm{tr}(J_x(u)A{}^tJ_x(u)S)=0.$$

   On déduit de la question 3.b), de cette partie, les deux matrices A et $J_x(u)A{}^tJ_x(u)$ sont colinéaires, donc il existe $\lambda(x)\in\mathbb{R}$ tel que $J_x(u)A{}^tJ_x(u)=\lambda(x)A$.

c) On a, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} D(f\circ u)(x) &= \operatorname{tr}(A^tJ_x(u)H_{u(x)}(f)J_x(u)) \\ &= \operatorname{tr}(J_x(u)A^tJ_x(u)H_{u(x)}(f)) \\ &= \lambda(x)\operatorname{tr}(AH_{u(x)}(f)) \\ &= \lambda(x)Df(u(x)). \end{aligned}$$

Partie II

1. a) Les deux matrices $J_x(u)$ et A étant inversibles, donc la matrice $\lambda(x)A = J_x(u)A^tJ_x(u)$ est inversible et par conséquent $\lambda(x) \neq 0$.

   b) Puisque u est de classe $\mathscr{C}^2$, l'application $x \mapsto J_x(u)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$. Il est de même de l'application $x \mapsto J_x(u)A^tJ_x(u)$. Donc pour tout (i,j), l'application $x \mapsto \lambda(x)a_{ij} = (J_x(u)A^tJ_x(u))_{ij}$ est de classe $\mathscr{C}^1$, et comme A est inversible, il existe au moins un couple (i,j) tel que $a_{ij} \neq 0$, donc λ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.

   c) On a $\lambda(x)I_n = BJ_x(u)A^tJ_x(u)$. Par multiplication à gauche par ${}^tJ_x(u)$ et à droite par ${}^tJ_x(u)^{-1}$, on obtient donc $\lambda(x)I_n =^t J_x(u)BJ_x(u)A$, d'où $\lambda(x)B =^t J_x(u)BJ_x(u)$.

2. On a, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \ \lambda(x)b_{ij} = ({}^tJ_x(u)BJ_x(u))_{i,j} = \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} b_{pq}\frac{\partial u_p}{\partial x_i}(x)\frac{\partial u_q}{\partial x_j}(x),$$

d'où, $\forall x \in \mathbb{R}^n$,

$$(1)\ \ b_{ij}\frac{\partial \lambda}{\partial x_k}(x) = \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} b_{pq}\frac{\partial^2 u_p}{\partial x_k\partial x_i}(x)\frac{\partial u_q}{\partial x_j}(x) + \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} b_{pq}\frac{\partial u_p}{\partial x_i}(x)\frac{\partial^2 u_q}{\partial x_k\partial x_j}(x).$$

En changeant (i,j,k) par (k,j,i) on obtient :

$$(2)\ \ b_{kj}\frac{\partial \lambda}{\partial x_i}(x) = \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} b_{pq}\frac{\partial^2 u_p}{\partial x_i\partial x_k}(x)\frac{\partial u_q}{\partial x_j}(x) + \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} b_{pq}\frac{\partial u_p}{\partial x_k}(x)\frac{\partial^2 u_q}{\partial x_i\partial x_j}(x).$$

Et de même , en changeant (i,j,k) par (i,k,j) on obtient :

$$(3)\ \ b_{ik}\frac{\partial \lambda}{\partial x_j}(x) = \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} b_{pq}\frac{\partial^2 u_p}{\partial x_j\partial x_i}(x)\frac{\partial u_q}{\partial x_k}(x) + \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} b_{pq}\frac{\partial u_p}{\partial x_i}(x)\frac{\partial^2 u_q}{\partial x_j\partial x_k}(x).$$

Par sommation, on obtient donc

$$\begin{aligned} b_{ki}\frac{\partial \lambda}{\partial x_k} + b_{kj}\frac{\partial \lambda}{\partial x_i} - b_{ij}\frac{\partial \lambda}{\partial x_k} &= \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} b_{pq}\frac{\partial u_p}{\partial x_k}\frac{\partial^2 u_q}{\partial x_i\partial x_j} + \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} b_{pq}\frac{\partial^2 u_p}{\partial x_j\partial x_i}\frac{\partial u_q}{\partial x_k} \\ &= 2\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} b_{pq}\frac{\partial u_p}{\partial x_k},\frac{\partial^2 u_q}{\partial x_i\partial x_j} \end{aligned}$$

en utilisant la symétrie de la matrice B.

3. Calculons de deux manières différentes : $E = \sum_{i,j}\sum_{p,q} a_{ij}b_{pq}\frac{\partial u_p}{\partial x_k}\frac{\partial^2 u_q}{\partial x_i\partial x_j}$.

   D'une part, on a :

$$E = \sum_{p,q} b_{pq}\frac{\partial u_p}{\partial x_k}\left(\sum_{i,j} a_{ij}\frac{\partial^2 u_q}{\partial x_i\partial x_j}\right) = \sum_{p,q} b_{pq}\frac{\partial u_p}{\partial x_k}Du_q = 0.$$

D'autre part

$$\begin{aligned} E &= \sum_{i,j} a_{ij}\left(\sum_{p,q} b_{pq}\frac{\partial u_p}{\partial x_k}\frac{\partial^2 u_q}{\partial x_i\partial x_j}\right)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}\left(b_{ik}\frac{\partial\lambda}{\partial x_j}+b_{kj}\frac{\partial\lambda}{\partial x_i}-b_{ij}\frac{\partial\lambda}{\partial x_k}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\lambda}{\partial x_j}\sum_{i=1}^{n} b_{ki}a_{ij}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\lambda}{\partial x_i}\sum_{j=1}^{n} b_{kj}a_{ji}-\frac{\partial\lambda}{\partial x_k}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}a_{ij}\right]\end{aligned}$$

Mais $AB = I_n$, donc $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\ \ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j\\ 0 & \text{si } i\neq j.\end{cases}$, d'où :

$$E = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x_k}+\frac{\partial\lambda}{\partial x_k}-\frac{\partial\lambda}{\partial x_k}\operatorname{tr}(AB)\right) = -\frac{1}{2}(n-2)\frac{\partial\lambda}{\partial x_k}.$$

En conclusion, $\forall k\in[\![1,n]\!], \forall x\in\mathbb{R}^n,\ \ (n-2)\dfrac{\partial\lambda}{\partial x_k}(x)$

4. a) Puisque $n\neq 2, \forall k\in[\![1,n]\!], \forall x\in\mathbb{R}^n,\ \ (n-2)\dfrac{\partial\lambda}{\partial x_k}(x)=0$ et donc λ est constant. Donc, d'après la question 2. de cette partie, $\forall i,j,k$,

$$\sum_{p,q} b_{pq}\frac{\partial u_p}{\partial x_k}\frac{\partial^2 u_q}{\partial x_i\partial x_j}=0.$$

Soit U_{ij} la matrice colonne qui admet comme élément de la q$^{\text{ième}}$ ligne $\dfrac{\partial^2 u_q}{\partial x_i\partial x_j}(x)$. On a donc

$$\sum_{p,q} b_{pq}\frac{\partial u_p}{\partial x_k}\frac{\partial^2 u_q}{\partial x_i\partial x_j}(x) = \sum_{p=1}^{n}\frac{\partial u_p}{\partial x_k}\sum_{q=1}^{n} b_{pq}\frac{\partial^2 u_q}{\partial x_i\partial x_j}(x) = ({}^tJ_x(u)BU_{ij})_k = 0,$$

où $({}^tJ_x(u)BU_{ij})_k$ est la k$^{\text{ième}}$ composante du vecteur ${}^tJ_x(u)BU_{ij}$, donc ${}^tJ_x(u)BU_{ij}=0$ et comme ${}^tJ_x(u)B$ est inversible alors $U_{ij}=0$, donc $\forall i,j,q,\ \ \dfrac{\partial^2 u_q}{\partial x_i\partial x_j}=0$.

b) La formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2, appliquée à u_q, s'écrit :

$$u_q(x) = u_q(0)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u_q}{\partial x_i}(0)x_i+\frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial^2 u_q}{\partial x_i\partial x_j}(\theta x) = u_q(0)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u_q}{\partial x_i}(0)x_i,$$

avec $\theta\in]0,1[$.
Donc u est une application affine. La matrice de la partie linéaire de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est $J_x(u)$, donc inversible.

c) Posons $J=J_x(u)$ qui ne depend donc pas de x. On a ${}^tBJ=\lambda B$. Soit q la forme quadratique dont la matrice dans la base canonique est B, et j l'application linéaire dont la matrice dans cette base est J. On a donc

$$\forall x\in\mathbb{R}^n,\ \ q(j(x))=\lambda q(x).$$

Soit (s,t) la signature de q avec $s+t=n$.
Si $s>t$, soit E un sous-espace vectoriel de dimension s de $\mathbb{R}^n$ tel que la restriction de q à E soit positive. La restriction de q à $j(E)$ ne peut être négative, donc $\lambda>0$.
Si $s<t$, un raisonnement analogue montre que $\lambda>0$.
Si $s=t$, on ne peut pas conclure : pour $n=2$, soit

$$B=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\ \ J_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\ \ J_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}.$$

Alors ${}^tJ_1BJ_1$, soit $\lambda=1$ et ${}^tJ_2BJ_2=-B$, soit $\lambda_2=-1$ et on a des exemples analogues en toute dimension paire.

5. Dans ce cas, on a :
$$Df = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$$
D'où $Du_1 = e^{x_1}\cos x_2 - e^{x_1}\cos x_2 = 0$ et $Du_2 = e^{x_1}\sin x_2 - e^{x_1}\sin x_2 = 0$, d'où la condition (1). On a
$$J_x(u) = \begin{pmatrix} e^{x_1}\cos x_2 & -e^{x_1}\sin x_2 \\ e^{x_1}\sin x_2 & e^{x_1}\cos x_2 \end{pmatrix} = e^{x_1}\begin{pmatrix} \cos x_2 & \sin x_2 \\ \sin x_2 & \cos x_2 \end{pmatrix}$$
Donc ${}^tJ_x(u)J_x(u) = e^{2x_1}I_2$ et par conséquent on a la condition (2). De plus $J_x(u)$ est inversible, ce qui entraîne la condition (3). Cependant u n'est pas affine.

••••••••••