Devoir surveillé $n°4$
Correction

EXERCICE I

1. Posons $S = (s_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$. Par définition, s_{ij} et s_{ji} valent 1 si $i + j = 2n + 1$, 0 sinon. Donc $s_{ij} = s_{ji}$: la matrice S est symétrique, donc diagonalisable, comme toutes les matrices symétriques à coefficients réels.
2. Soient i, j, k trois entiers compris entre 1 et $2n$. Par définition $s_{ik}s_{kj}$ vaut 1 si $i+k = j+k = 2n+1$, et 0 sinon. Or si $i + k = j + k = 2n + 1$, alors $i = j$ et $k = 2n + 1 - i$. Donc
$$\sum_{k=1}^{2n} s_{ij}s_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
La matrice S^2 est donc la matrice identité, donc S est son propre inverse.
3. D'après la question précédente, $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de S. Donc le polynôme minimal divise $X^2 - 1$. Or il n'est égal ni à $X - 1$, ni à $X + 1$ (car $S \neq \pm I$). Donc le polynôme minimal de S est $X^2 - 1$.
4. Soit $v = v(k)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^{2n}$. Le terme d'ordre i du produit Sv est $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} s_{ik}v(k)$.
Or cette somme ne contient qu'un seul terme non nul, correspondant à $i + k = 2n + 1$, soit $i = 2n + 1 - k$: le terme d'ordre i de Sv est égal au terme d'ordre $2n + 1 - i$ de v. Par définition, pour tout k, $v_i(k) = v_i(2n + 1 - k)$ et $w_i(k) = -w_i(2n + 1 - k)$. Donc $Sv_i = v_i$ et $Sw_i = -w_i$.
5. Par définition si $i \neq j$, les termes non nuls de v_i et ceux de v_j et w_j sont d'indices différents. Donc :
$${}^t v_i v_j = \sum_{k=1}^{2n} v_i(k)v_j(k) = 0 \text{ et } \quad {}^t v_i w_j = \sum_{k=1}^{2n} v_i(k)w_j(k) = 0 \; .$$
Pour $i = j$:
$${}^t v_i w_i = \sum_{k=1}^{2n} v_i(k)w_j(k) = 1 - 1 = 0 \; ,$$
puis
$${}^t v_i v_i = \sum_{k=1}^{2N} v_i(k)^2 = 2 \text{ et } \quad {}^t w_i w_i = \sum_{k=1}^{2N} w_i(k)^2 = 2 \; .$$
Si P la matrice dont les vecteurs colonnes sont $(v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n)$, le terme d'ordre (i, j) de P^tP vaut 2 si $i = j$, 0 sinon. Donc $P^tP = 2I$.
6. La matrice $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}P$ est telle que $Q^tQ = \frac{1}{2}P^tP = I$. C'est donc la matrice d'un changement de base orthonormée. Comme les colonnes de P sont des vecteurs propres de S, il en est de même des colonnes de Q. Donc :
$${}^t QSQ = Q^{-1}SQ = D \; ,$$
où D est la matrice diagonale don les n premiers coefficients valent 1, les n suivants valent -1.
7. Si $b = 0$, $A = aI$ les résultats sont triviaux.
Supposons $b \neq 0$ et écrivons :
$${}^t QAQ = {}^t Q(aI + bS)Q = a {}^t QQ + b {}^t QSQ = aI + bD \; .$$

La matrice $aI + bD$ est diagonale, ses n premiers coefficients valent $a+b$ les n suivants valent $a-b$. Les valeurs propres de A sont $a+b$ et $a-b$, chacune de multiplicité n. Donc le polynôme caractéristique de A est $(X-(a+b))^n(X-(a-b))^n$.
Comme A est diagonalisable, son polynôme minimal n'a que des racines simples, et il a pour racines les deux valeurs propres distinctes. Il vaut donc $(X-(a+b))(X-(a-b))$.

EXERCICE II

1. Posons $l(x) = (Ax, x)$ et $b(x,y) = (x|y)$, donc $q = b \circ l$. Il est clair que l est linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et b est bilinéare, c'est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$. Ceci montre que q est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}^n$, on a :

$$\begin{aligned} dq_x(y) &= db_{l(x)} \circ dl_x(y) \\ &= db_{l(x)} \circ l(y) = db_{(Ax,x)} \circ l(y) \\ &= db_{(Ax,x)}(Ay, y) \\ &= (Ax|y) + (x|Ay) = 2(Ax|y) \\ &= (\operatorname{grad} q(x)|y) \end{aligned}$$

D'où $\operatorname{grad} q(x) = 2Ax$ et donc $\dfrac{\partial q}{\partial x_i}(x) = 2\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$ et $\sum_{i=1}^{n} x_i \dfrac{\partial q}{\partial x_i}(x) = (\operatorname{grad} q(x)|x) = 2(Ax|x) =$ $2q(x)$.

2. a) D'après ce qui précède, l'application φ vérifie $(\varphi(x)|y) = (Ax|y) = f(x,y)$ pour tout x, y de $\mathbb{R}^n$, de plus si φ_1 est une application vérifiant la même égalité, on aura, $(\varphi_1(x) - \varphi(x)|y) = 0$ pour tout x, y de $\mathbb{R}^n$ et donc $\varphi_1 = \varphi$.

   b) Soit $\mathscr{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. Notons $M = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ et $S = (s_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ les matrices de φ et f respectivement dans la base $\mathscr{B}$. Pour tout (i,j) on a :

$$m_{ij} = (\varphi(e_j)|e_i) = f(e_j, e_i) = f(e_i, e_j) = s_{ij},$$

   donc $M = S$.

   c) φ est un endomorphisme symétrique réel, donc d'après le théorème spectral, il est diagonalisable dans une base orthonormée $(v_1, v_2, ..., v_n)$. Si $X = \sum_{i=1}^{n} X_i v_i$, alors

$$q(X) = (\varphi(X)|X) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i v_i | \sum_{i=1}^{n} X_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i^2.$$

3. Si λ est une valeur propre de φ, alors

$$\varphi(x) = \lambda x \Leftrightarrow \operatorname{grad} q(x) = 2\lambda x \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ \ \frac{\partial q}{\partial x_i}(x) = 2\lambda x,$$

   et dans ce cas $q(x) = (\varphi(x)|x) = (\lambda x|x) = \lambda(x|x)$.

4. APPLICATION NUMÉRIQUE : Considérons $q_1(x,y,z) = 2q(x,y,z) = 2xy + 2yz + 2xz$. La matrice associée à la forme quadratique q_1 est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

   et donc $\chi_A(\lambda) = (\lambda+1)^2(2-\lambda)$. On trouve $q(X,Y,Z) = X^2 - \dfrac{1}{2}Y^2 - \dfrac{1}{2}Z^2$.

PROBLÈME

I. TRANSFORMATION D'ABEL

1. Pour tout entier naturel non nul n, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\sum_{p=1}^{n-1} A_p(b_p - b_{p+1}) + A_n b_n &= \sum_{p=1}^{n-1} A_p b_p + \sum_{p=1}^{n-1} A_p b_{p+1} + A_n b_n \\ &= \sum_{p=1}^{n} A_p b_p - \sum_{q=2}^{n} A_{q-1} b_q = A_1 b_1 + \sum_{p=2}^{n} (A_p - A_{p-1}) b_p \\ &= a_1 b_1 + \sum_{p=2}^{n} a_p b_p = \sum_{p=1}^{n} a_p b_p = S_n\end{aligned}$$

2. Comme $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite monotone et converge vers 0, on a :
   • ou bien $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante de réels négatifs ou nuls.
   • ou bien $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de réels positifs ou nuls.
   Quitte à remplacer $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $(-b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on peut supposer que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de réels positifs ou nuls.
   Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. D'après la question précédente on a :

$$S_{n+p} = \sum_{k=1}^{n+p-1} A_k(b_k - b_{k+1}) + A_{n+p} b_{n+p}$$

   et

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) + A_n b_n = \sum_{k=1}^{n} A_k(b_k - b_{k+1}) + A_n b_{n+1}.$$

   Donc

$$S_{n+p} - S_n = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} A_k(b_k - b_{k+1}) + A_{n+p} b_{n+p} - A_n b_{n+1},$$

   d'où

$$\begin{aligned}|S_{n+p} - S_n| &\leq \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |A_k|(b_k - b_{k+1}) + |A_{n+p}| b_{n+p} + |A_n| b_{n+1} \\ &\leq M\left(\sum_{k=n+1}^{n+p-1} (b_k - b_{k+1}) + b_{n+p} + b_{n+1}\right) = 2M b_{n+1}\end{aligned}$$

   Comme $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0, il est de même pour la suite $(2Mb_{n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$, donc $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$ on a $2Mb_{n+1} \leq \varepsilon$. On obtient donc $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ vérifie $n \geq n_0$ $|S_{n+p} - S_n| \leq \varepsilon$. Ainsi la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy, donc convergente, c'est-à-dire la série numérique de terme général $a_n b_n$ est convergente.

3. Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n |u_n|$ une série alternée. Posons $\forall p \in \mathbb{N}^*$ $a_p = (-1)^{p-1}$ et $b_p = |u_{p-1}|$. Alors les deux hypothèses de la question I.2 sont vérifiées. (on peut prendre $M = 1$)
   Donc d'après la question I.2, $\sum_{p\in\mathbb{N}^*} a_p b_p$ converge, c'est-à-dire $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n |u_n|$ converge.

4. a) Soit x un réel fixé.
   - si $x<0$, $|f_n(x)| = e^{-x\ln n}$ tend vers l'infini quand n tend vers l'infini.
   - si $x=0$, $|f_n(x)| = 1$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers l'infini.

   Dans ces deux cas, les séries $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x)$ et $\sum\limits_{n\geq 1} |f_n(x)|$ sont toutes deux divergentes puisque leur terme général ne tend pas vers 0.
   - si $x>0$, $(|f_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et converge vers 0. Donc $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x) = \sum\limits_{n\geq 1}(-1)^n|f_n(x)|$ est une série alternée, dont le terme général tend vers 0, il est donc convergente d'après la question I.3.

   La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}|f_n(x)| = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^x}$ est une série de Riemann, donc elle est convergente si, et seulement si, $x>1$.

   En conclusion, la série de fonctions de termes général f_n est simplement convergente sur $]0,+\infty[$, et absolument convergente sur $]1,+\infty[$.

   b) Soit $x_1\in\mathbb{R}$, $x_2\in]x_1,+\infty[$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ fixé, la fonction $x\longmapsto |f_n(x)| = \dfrac{1}{n^x}$ est décroissante sur $[x_1,x_2]$, donc $\sup\limits_{x\in[x_1,x_2]}|f_n(x)| = \dfrac{1}{n^x}$.

   Par conséquent : $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ est normalement convergente sur $[x_1,x_2]$ si, et seulement si, $\displaystyle\sum\frac{1}{n^{x_1}}$ si, et seulement si, $x_1>1$.

II. APPLICATION À L'ÉTUDE D'UNE SÉRIE TRIGONOMÉTRIQUE

1. Puisque $x\neq 2k\pi$, alors $e^x\neq 1$ et par conséquent :

$$\begin{aligned}\sum_{p=1}^{n} e^{ipx} &= e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}\\ &= e^{ix}\frac{e^{\frac{inx}{2}}}{e^{\frac{ix}{2}}}\frac{e^{\frac{-inx}{2}}-e^{\frac{inx}{2}}}{e^{\frac{-ix}{2}}-e^{\frac{ix}{2}}} = e^{i(n+1)\frac{x}{2}}\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\end{aligned}$$

   Donc

$$(1)\quad \sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \mathrm{Re}(\sum_{p=1}^{n} e^{ipx}) = \cos(n+1)\frac{x}{2}\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{-1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sin(2n+1)\dfrac{x}{2}}{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)};$$

   et

$$(2)\quad \sum_{k=1}^{n}\sin(kx) = \mathrm{Im}(\sum_{p=1}^{n} e^{ipx}) = \sin(n+1)\frac{x}{2}\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = \sin(n+1)\frac{x}{2}\frac{\sin n\dfrac{x}{2}}{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}.$$

2. $\sum\limits_{n\geq 1} h_n(x)$ et $\sum\limits_{n\geq 1} g_n(x)$ sont toutes deux convergentes si, et seulement si, la série

$$\sum_{n\geq 1}(h_n(x)+ig_n(x)) = \sum_{n\geq 1}\frac{e^{inx}}{n^s}$$

   est convergente. Mais $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $|e^{inx}|=1$ donc $|\dfrac{e^{inx}}{n^s}| = \dfrac{1}{n^s}$, donc
   - si $s>1$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{e^{inx}}{n^s}$ est absolument convergente donc convergente.

• si $s \leq 0$, le terme général de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{inx}}{n^s}$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers l'infini, donc cette série diverge.

• soit $s \in]0,1]$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $a_n = \cos nx$ (resp. $\sin nx$) et $b_n = \frac{1}{n^s}$. Clairement $(b_n)_{n,\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de limite 0, et il résulte des relations (1) et (2) et des notions da la question I.2 :

$$\exists M > 0 \text{ tel que } \forall p \in \mathbb{N}^* \ |A_p| \leq M.$$

Donc toujours d'après la question I.2 la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos nx}{n^s}$ (resp. $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin nx}{n^s}$) converge.

En conclusion, les séries de fonctions $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos nx}{n^s}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin nx}{n^s}$ sont simultanément simplement convergentes sur $\mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$ si, et seulement si, $s > 0$.

3. a) Il est clair que $y_n(\pi) = 0$, et $\forall x \in]0, 2\pi[$

$$y_n'(x) = \sum_{p=1}^{n} \cos px = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sin(2n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

d'où

$$\forall x \in]0, \pi[, y_n(x) = \frac{\pi - x}{2} + \int_{\pi}^{x} \frac{\sin(\frac{2n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}} dt.$$

Posons $h(t) = \frac{1}{\sin(\frac{t}{2})}$ pour $t \in [x, \pi]$. Donc par une intégration par parties on obtient :

$$\int_{x}^{\pi} h(t)\sin(n+\frac{1}{2})tdt = \frac{2}{2n+1}\left(\frac{\cos(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}} + \int_{x}^{\pi} h'(t)\cos(n+\frac{1}{2})tdt\right).$$

Ainsi $v_n(x) = 2\frac{\cos(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}$ et $w_n(x) = 2h'(x)\cos(n+\frac{1}{2}x$.

b) $\forall x \in [\alpha, \beta]$ on a $\forall t \in [x, \pi] \subset [\alpha, \pi]$ $\sin\frac{\alpha}{2} \leq \sin\frac{t}{2} \leq 1$, donc :

$$\left|y_n(x) - \frac{\pi - x}{2}\right| \leq \frac{2}{2n+1}\left(\int_{x}^{\pi} \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} dt + \sup_{t\in[\alpha,\beta]} |h'(t)|(\pi - x)\right) \leq \frac{M}{2n+1}$$

où

$$M = 2(\beta - \alpha)\left(\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \sup_{t\in[\alpha,\beta]} |h'(t)|\right),$$

ce qui montre que la suite de terme général y_n converge uniformément sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ vers la fonction

$$y : x \to y(x) = \frac{\pi - x}{2}.$$

4. a) Il résulte de la question II.2.(a) que la série $\sum_{n\geq 1} z_n$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$, elle converge aussi pour $x = 2k\pi$, donc elle converge simplement sur $\mathbb{R}$.
D'après la question II.2.(b), on a pour tout $x \in]0, \pi[$:

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin px}{p} = \lim_{n\to\infty} y_n(x) = \frac{\pi - x}{2}$$

Remarquons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{p=1}^{n} z_p$ est impaire donc la limite simple $\sum_{p=1}^{\infty} z_p$ est impaire. D'où $\forall x \in]-\pi, 0[$, $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} z_p(x) = -\frac{\pi-(-x)}{2} = -\frac{\pi+x}{2}$.

En conclusion :

$$\forall x \in]0,\pi[\ \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin px}{p} = \frac{\pi - x}{2}, \ \ \forall x \in]-\pi, 0[\ \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin px}{p} = -\frac{\pi+x}{2}$$

b) Remarquons que la série $\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^p}{2p+1}$ est une série alternée dont le terme général tend vers 0, donc convergente. D'après ce qui précède

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi - \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

III. CALCUL D'UNE INTÉGRALE

La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ est continue sur $]0,1]$, et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, on peut donc prolonger $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ en une fonction continue sur $[0,1]$ en posant

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x \in]0,1] \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

D'où $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}dx$ existe et $I = \displaystyle\int_0^1 \widetilde{f}(x)dx$.
Soit $x \in]0,1]$ fixé. Appliquons la formule de Taylor-Lagrange à la fonction $\ln$ entre 1 et $1+x$, il vient : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, il existe $c_n \in]1, 1+x[$ tel que :

$$\ln(1+x) = \sum_{p=1}^{n} \frac{x^k}{k!}\ln^{(k)}(1) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\ln^{(n+1)}(c_n) = \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)c_n},$$

d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left|\ln(1+x) - \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k\right| \leq \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi

$$\forall x \in]0,1], \quad \frac{\ln(1+x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{n-1}.$$

En utilisant le critère spécial des séries alternées, on montre que la série $\displaystyle\sum_{p\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{n-1}$ converge uniformément sur $[0,1]$. Les deux fonctions $x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{n-1}$ et $\widetilde{f}$ sont définies et continues sur $[0,1]$ et coïncident sur $]0,1]$, donc

$$\forall x \in [0,1], \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{n-1} = \widetilde{f}(x).$$

Par convergence uniforme on peut intégrer terme à terme la série $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{n-1}$ sur $[0,1]$, il vient :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}dt = \sum_{p=1}^{\infty}\int_0^1 \frac{(-1)^{n-1}}{n}t^{n-1}dt = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$