Devoir surveillé $n°5$
Correction

Exercice

1. Puisque $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$, on démontre par exemple par le critère de d'Alembert que le rayon de convergence vaut 1.
2. La suite $\left(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et positive. D'après le critère des séries alternées, la série converge en -1.
   En 1, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est divergente, par comparaison à la série de Riemann divergente $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{\sqrt{n}}$.
3. a) La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, qui est à termes positifs, est divergente. Il existe donc un entier $N \geq 1$ tel que
   $$\sum_{n=1}^{N} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq M+1.$$
   De plus, cet entier N étant fixé, la fonction $h : x \mapsto \sum_{n=1}^{N} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$ est continue en 1. Ceci donne l'existence de $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in]1-\delta, 1]$,
   $$h(x) \geq h(1) - 1.$$
   Ceci est exactement le résultat demandée.

   b) Puisqu'on a une série à termes positifs, la série majore toutes ses sommes partielles. Ainsi, pour tout $M > 0$, on peut trouver $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in]1-\delta, 1[$,
   $$f(x) \geq M.$$
   Ceci signifie exactement que f tend vers $+\infty$ en 1^-.
4. a) Il est clair que, pour tout $x \in [0,1]$, on a
   $$\left|\left[\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\right] x^n\right| \leq \left|\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\right|.$$
   D'après, par exemple, l'inégalité des accroissements finis,
   $$\left|\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\right| \leq \left|\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n-1}}\right| \leq \frac{C}{n^{3/2}}.$$
   La série numérique de terme général $n^{-3/2}$ étant convergente, ceci prouve la convergence normale de la série définissant g sur $[0,1]$.

   b) Soit $x \in [0,1[$, on a :
   $$\begin{aligned}(1-x)f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sum_{n=2}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\right] x^n = \sin(1) + g(x)\end{aligned}$$

Or, g étant continue en 1, on trouve

$$\lim_{x\to 1}(1-x)f(x)=\sin(1)+g(1)=\sin(1)+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\right]=0.$$

Problème

PARTIE I

1. Soient f et g deux éléments de $\mathscr{S}$. Pour tout couple $(p,q)\in\mathbb{N}^2$ et tout $x\in\mathbb{R}$, on a :

$$x^p(fg)^{(q)}(x)=x^p\sum_{k=0}^{n}\complement_q^k f^{(k)}(x)g^{(q-k)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\complement_q^k x^p f^{(k)}(x)g^{(q-k)}(x).$$

Or $\lim\limits_{|x|\to+\infty} x^p f^{(k)}(x)=\lim\limits_{|x|\to+\infty} fg^{(q-k)}(x)=0$, ceci implique que $\lim\limits_{|x|\to+\infty} x^p(fg)^{(q)}(x)=0$, donc $fg\in\mathscr{S}$.

Soit $f_t(x)=\exp\left(tx-\dfrac{x^2}{2}\right)$. Calculons, pour $q\in\mathbb{N}$, $f_t^{(q)}(x)$. On a $f_t'(x)=(t-x)f_t(x)$ puis on montre par récurrence sur q que $f_t^{(q)}(x)=P_t(x)f_t(x)$ où P_t est un polynôme en x, donc

$$\forall p\in\mathbb{N},\;\; x^p f_t^{(q)}(x)=x^pP_t(x)\exp\left(\frac{-1}{2}(x-t)^2+\frac{t^2}{2}\right),$$

d'où

$$\lim_{|x|\to+\infty} x^p f_t^{(q)}(x)=0,$$

donc $f_t\in\mathscr{S}$ et par suite $\mathscr{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^\infty$ non réduit à $\{0\}$.

2. Il est clair que les applications U,V et H sont des applications linéaires de $\mathscr{S}$ dans $\mathscr{C}^\infty$. De plus si $f\in\mathscr{S}$, $\lim\limits_{|x|\to+\infty} x^p(Uf)^{(q)}(x)=\lim\limits_{|x|\to+\infty} x^p(Vf)^{(q)}(x)=\lim\limits_{|x|\to+\infty} x^p(Hf)^{(q)}(x)=0$ (vérification immédiate), donc U,V et H sont en fait des endomorphismes de $\mathscr{S}$.

Soit $f\in\mathscr{S}$ et $x\in\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}(V\circ U)(f)(x) &= V(Uf)(x)\\ &= x(Uf)(x)-(Uf)'(x)\\ &= x(xf(x)+f'(x)-(xf(x)+f'(x))'\\ &= x^2f(x)-f''(x)-f(x)\\ &= (Hf-f)(x)\end{aligned}$$

D'où $\forall f\in\mathscr{S}$, $(V\circ U)(f)=(H-Id)(f)$, donc $V\circ U=H-Id$.

3. Si $f\in\mathscr{S}$, $\lim\limits_{|x|\to+\infty}(1+x^2)x^pf^{(q)}(x)=0$ ce qui entraîne l'existence d'un réel $A>0$ tel que $|x|\geq A$ on a $\left|(1+x^2)x^pf^{(q)}(x)\right|\leq 1$. Sur le segment $[-A,A]$, la fonction $x\mapsto(1+x^2)x^pf^{(q)}(x)$ est continue, donc il existe $N_{p,q}>0$ tel que $\forall x\in[-A,A]$, $\left|(1+x^2)xpf^{(q)}\right|\leq N_{p,q}$. Ainsi pour $M_{p,q}=\max(1,N_{p,q})$, on a $\forall x\in\mathbb{R}$, $\left|x^pf^{(q)}(x)\right|\leq\dfrac{M_{p,q}}{1+x^2}$.

4. Si f et g sont dans $\mathscr{S}$, alors f^2 et fg sont aussi dans $\mathscr{S}$, et d'après la question précédente il existe des constantes positives $M(f)$ et $M(f,g)$ telles que

$$\forall x\in\mathbb{R},\;\; |f^2(x)|\leq\frac{M(f)}{1+x^2},\;\; |f(x)g(x)|\leq\frac{M(f,g)}{1+x^2}$$

donc f^2 et fg ont des intégrales absolument convergentes sur $\mathbb{R}$.

5. Si $f \in \mathscr{S}$, alors $\overline{f} \in \mathscr{S}$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)} g(x)dx$ est absolument convergente, par conséquent l'application

$$(f, g) \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)} g(x)dx$$

est bien définie.
D'autre part on peut vérifier facilement, en utilisant la linéarité de l'intégrale et les propriétés des nombres complexes, que cette application est une forme hermitienne définie positive.
L'inégalité de Cauchy-Schwartz s'écrit $|(f|g)| \leq \sqrt{(f|f)}\sqrt{(g|g)}$ ou encore $|I_1| \leq \sqrt{I_2}\sqrt{I_3}$.

6. Soient f et g de $\mathscr{S}$, on a, à l'aide d'une intégration par parties,

$$\begin{aligned}
(Uf|g) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{xf(x) + f'(x)} g(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)} xg(x)dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f'(x)} g(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)} xg(x)dx + \left[\overline{f'(x)} g(x)\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)} g'(x)dx \\
&= (f|Vg)
\end{aligned}$$

$\left[f'(x)g(x)\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$, car si $f \in \mathscr{S}$, $\displaystyle\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = 0$. De même on montre que $(Vf|g) = (f|Ug)$.
D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
(Hf|g) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{x^2 f(x) - f''(x)} g(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)} x^2 g(x)dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f''(x)} g(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)} x^2 g(x)dx - \left[\overline{f'(x)} g(x)\right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f'(x)} g'(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)} x^2 g(x)dx + \left[\overline{f'(x)} g'(x)\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)} g''(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)} x^2 g(x)dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)} g''(x)dx \\
&= (f|Hg).
\end{aligned}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de H, alors il existe $f \in \mathscr{S}$ non nul tel que $H(f) = \lambda f$ et donc

$$(Hf|f) = (\lambda f|f) = \overline{\lambda}(f|f)$$

et on a aussi $(Hf|f) = (f|Hf) = \lambda(f|f)$ et comme f est non nul alors $\overline{\lambda} = \lambda$, donc λ est un réel.

PARTIE II

1. Il est clair que $u_t \in \mathscr{S}$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
(u_t|u_t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (a(t))^2 \exp\left[2\left(tx - \frac{x^2}{2}\right)\right] dx \\
&= (a(t))^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\left(x^2 - 2tx + t^2 - t^2\right)\right] dx \\
&= (a(t))^2 \exp(t^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-(x-t)^2]dx \\
&= (a(t))^2 \exp(t^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-u^2)dx \\
&= \sqrt{\pi}(a(t))^2 \exp(t^2)
\end{aligned}$$

Donc si $\|u_t\| = \exp\left(\dfrac{t^2}{4}\right)$ et comme $a(t)$ est positive, alors $a(t) = \left(\dfrac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\dfrac{t^2}{4}\right)$.
On vérifie sans peine que $\forall x \in \mathbb{R}, Uu_t(x) = tu_t(x)$ et que $Vu_t(x) = (2x - t)u_t(x)$.

2. Pour $t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto \exp\left(tx - \dfrac{x^2}{2}\right)$ est dans $\mathscr{S}$, donc si $f \in \mathscr{S}$, $x \mapsto \exp\left(tx - \dfrac{x^2}{2}\right) f(x)$ admet une intégrale absolument convergente.

3. a) Soit $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
Lu_0(t) &= \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_t(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \\
&= a(t) \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(tx - x^2) dx \\
&= a(t) \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(\frac{t^2}{4}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\left(x - \frac{t}{2}\right)^2\right) dx \\
&= 1
\end{aligned}$$

D'où $\forall t \in \mathbb{R}, Lu_0(t) = 1$.

b) i. Si $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$ alors $u_t(x) \in \mathbb{R}$, donc

$$Lf(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_t(x) f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{u_t(x)} f(x) dx = (u_t|f).$$

ii. Pour $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
(L \circ V)(f)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} a(t) \exp\left(tx - \frac{x^2}{2}\right) \left(xf(x) - f'(x)\right) dx \\
&= a(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(tx - \frac{x^2}{2}\right) xf(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} (t - x) u_t(x) f(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} tu_t(x) f(x) dx \\
&= tL(f)(t)
\end{aligned}$$

iii. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\left| L(f)(t) \exp\left(-\frac{t^2}{4}\right) \right| &= \left| \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(tx - \frac{x^2}{2}\right) f(x) dx \right| \\
&\leq \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(2tx - x^2\right) dx\right)^{\frac{1}{2}} \|f\| \\
&\leq \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(t^2 + 2tx - x^2 - t^2\right) dx\right)^{\frac{1}{2}} \|f\| \\
&\leq \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right) \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) \sqrt{\pi}^{\frac{1}{2}} \|f\| = \|f\|
\end{aligned}$$

Donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $\left| L(f)(t) \exp\left(\dfrac{-t^2}{4}\right) \right| \leq \|f\|$.

4. a) La fonction $(x, t) \mapsto f(x) \exp\left(tx - \dfrac{x^2}{2}\right)$ est continue et admet une dérivée partielle par rapport à t : $(x, t) \mapsto xf(x) \exp\left(tx - \dfrac{x^2}{2}\right)$ qui est continue sur $[-n, n] \times \mathbb{R}$, ceci entraîne que F_n est de

classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_n'(t) = \int_{-n}^{+n} x f(x) \exp\left(tx - \frac{x^2}{2}\right) dx.$$

b) Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} |F_n'(t) - G(t)| &\leq \int_{-\infty}^{-n} \exp\left(tx - \frac{x^2}{2}\right) |xf(x)|dx + \int_{n}^{+\infty} \exp\left(tx - \frac{x^2}{2}\right) |xf(x)|dx \\ &\leq \int_{-\infty}^{-n} \exp\left(t_0x - \frac{x^2}{2}\right) |xf(x)|dx + \int_{n}^{+\infty} \exp\left(t_0x - \frac{x^2}{2}\right) |xf(x)|dx \end{aligned}$$

où $\exp\left(t_0x - \frac{x^2}{2}\right) = \sup\limits_{t\in[-A,A]} \exp\left(tx - \frac{x^2}{2}\right)$. Le terme à droite tend vers 0 (reste d'une intégrale convergente) indépendamment de $t \in [-A, A]$. Ceci montre que la suite de fonctions $(F_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers G sur tout intervalle $[-A, A]$ de $\mathbb{R}$ ($A > 0$). De même on montre que la suite de fonctions $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers F sur tout intervalle $[-A, A]$ de $\mathbb{R}$.

c) D'après le théorème du cours et les questions précédentes, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F' = G$.

5. D'après ce qui précède Lf est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} (Lf)'(t) &= -\frac{t}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)u_t(x)f(x)dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} xu_t(x)f(x)dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} xu_t(x)f(x)dx \\ &= \frac{-1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)u_t(x)f(x)dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} xu_t(x)f(x)dx \\ &= \frac{-1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} u_t'(x)f(x)dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} xu_t(x)f(x)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} u_t(x)f'(x)dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} xu_t(x)f(x)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} u_t(x)(Uf)(x)dx \end{aligned}$$

D'où $(Lf)' = \dfrac{1}{2}(L \circ U)f$.

6. Une vérification immédiate montre que $(L \circ H)f = Lf + 2Id \times (Lf)'$.

PARTIE III

1. On sait que $(L \circ V)h_0(t) = t(Lh_0)(t)$, donc $Lh_n(t) = t^n Lh_0(t)$ avec $Lh_0(t) = \pi^{\frac{1}{4}}$, donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $Lh_n(t) = \pi^{\frac{1}{4}} t^n$.

2. a) Soit $f \in \mathscr{S}$ telle que $Lf = 0$, comme $a(t) > 0$, alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(tx - \frac{x^2}{2}\right) f(x)dx = 0$. On peut vérifier facilement que l'application $\mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(tx - \frac{x^2}{2}\right) f(x)dx$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(tx - \frac{x^2}{2}\right) f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(tx - \frac{x^2}{2}\right) x^n f(x)dx = 0$$

d'où

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_t(x)x^n f(x)dx = 0$$

Donc on a montré que $Lf = 0$ entraîne $Lg_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
La réciproque est clair, car si $Lg_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, en particulier $Lg_0 = Lf = 0$.

b) Posons $P = \sum_{n=0}^{N} a_n X^n$, donc

$$\begin{aligned} 0 = L(Ph_0)(t) &= \sum_{n=0}^{N} a_n \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(tx - \frac{x^2}{2}\right) x^n h_0(x)dx \\ &= \sum_{n=0}^{N} a_n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(tx - \frac{x^2}{2}\right) h_0(x)dx\right) \end{aligned}$$

D'où $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \sqrt{\pi} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} \exp\left(\frac{t^2}{4}\right) = \sqrt{\pi} \exp\left(\frac{t^2}{4}\right) \sum_{n=0}^{N} a_n Q_n(t) = 0$$

avec Q_n un polynôme de degré n, donc $a_n = 0$ pour tout n, donc $P = 0$.

3. Soit $f \in \mathscr{E}$ et P un polynôme tel que $f = Ph_0$. Si $Lf = 0$, alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $Lf(t) = 0$ et donc $P = 0$ d'après la question précédente, d'où $f = 0$ et donc L est injective sur $\mathscr{E}$.

4. La solution générale de l'équation différentielle $2ty' + y = \lambda y$ est de la forme $y(t) = k|t|^{\frac{\lambda-1}{2}}$ où k est une constante réelle. Pour que cette solution soit de classe $\mathscr{C}^\infty$ il faut que $\dfrac{\lambda - 1}{2} \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire λ est de la dorme $2n + 1$ avec $n \in \mathbb{N}$.
Soit λ une valeur propre de H, alors il existe $f \in \mathscr{S}$ non nul tel que $Hf = \lambda f$, la question 6. de la partie II implique que Lf est solution de l'équation différentielle $2ty' + y = \lambda y$, comme Lf est $\mathscr{C}^\infty$, alors $\lambda = 2n + 1$, $n \in \mathbb{N}$. Donc $t(Lf)'(t) = nLf(t)$, d'où $Lf(t) = kt^n, \;\; k \in \mathbb{R}$. Il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $L(\alpha f)(t) = \pi^{\frac{1}{4}} t^n$.
Si $f \in E$, alors $L(\alpha f)(t) = Lh_n(t)$ et donc $\alpha f = h_n$, donc $f \in \mathrm{Vect}(h_n)$.

●●●●●●●●●●●