Devoir surveillé $n°2$
Correction

Problème I

PARTIE I

1. Toute fonction continue sur $[0,1]$ est bornée sur $[0,1]$. On a donc $\mathscr{C} \subset \mathscr{B}$.
$\mathscr{C}$ est non vide et si $f, g \in \mathscr{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f + \lambda g \in \mathscr{C}$. $\mathscr{C}$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathscr{B}$.

2. Par définition, on a $\forall f \in \mathscr{B}$, $\|f\| \geq 0$.
On a

$$\|f\| = 0 \Leftrightarrow \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \forall x \in [0,1], \quad f(x) = 0.$$

$\|f\|$ est donc nul si, et seulement si, f est la fonction nulle sur $[0,1]$.
Les autres propriétés sont évidentes.

3. (a) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $(\mathscr{B}, \|.\|_\infty)$, pour tout $x \in [0,1]$, on a :

$$\|f_p(x) - f_q(x)\| \leq \|f_p - f_q\|_\infty.$$

Cette inégalité montre que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(\mathbb{R}, |.|)$, elle donc convergente vers une limite qui dépend de x.

(b) La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant de Cauchy dans $(\mathscr{B}, \|.\|_\infty)$, elle est bornée, il existe $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \ \|f_n\| \leq M$. On a :

$$\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}, \ \|f_n(x)\| \leq M$$

Pour x fixé et faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $\forall x \in [0,1], \quad \|f(x)\| \leq M$ ce qui montrer que $f \in \mathscr{B}$.

(c) Soit $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$:

$$\forall p, q \geq n_0 \Longrightarrow \forall x \in [0,1], \quad \|f_p(x) - f_q(x)\| \leq \varepsilon.$$

Si n fixé supérieure à n_0, en faisant tendre q vers $+\infty$, on obtient :

$$\forall p \geq n_0 \Longrightarrow \forall x \in [0,1], \quad \|f_p(x) - f(x)\| \leq \varepsilon,$$

ce qui montre la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f dans $(\mathscr{B}, \|.\|_\infty)$.
Toute suite de Cauchy dans l'espace $(\mathscr{B}, \|.\|_\infty)$ converge donc vers un élément de $\mathscr{B}$. L'espace $(\mathscr{B}, \|.\|_\infty)$ est donc complet.

4. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{C}$ qui converge vers $f \in \mathscr{B}$. Montrons que $f \in \mathscr{C}$. En effet, $\forall x_0, x \in [0,1]$, on a :

$$\|f(x) - f(x_0)\|_\infty = \|f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)\|_\infty,$$

d'où

$$\|f(x) - f(x_0)\|_\infty \leq \|f(x) - f_n(x)\|_\infty + \|f_n(x) - f_n(x_0)\|_\infty + \|f_n(x_0) - f(x_0)\|_\infty.$$

Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f our la norme $\|.\|_\infty$, il existe $n_0 \in N$ tel que $\forall x \in [0,1]$, $\forall n \geq n_0$,

$$\|f(x) - f_n(x)\|_\infty \leq \tfrac{\varepsilon}{3} \text{ et } \|f(x_0) - f_n(x_0)\|_\infty \leq \tfrac{\varepsilon}{3}$$

Fixons maintenant n en prenant par exemple $n = n_0$ de façon que les deux dernières inégalités soient vérifiées. Alors, la fonction f_n étant continue au point x_0, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\|x - x_0\| < \alpha \Longrightarrow \|f_n(x) - f_n(x_0)\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Donc, en posant $\|x - x_0\| < \alpha$, il est certain que

$$\|f(x) - f(x_0)\|_\infty \leq \varepsilon$$

ce qui montre la continuité de f au point x_0, et par conséquent $f \in \mathscr{C}$. Donc $\overline{\mathscr{C}} = \mathscr{C}$. Le sous-espace $\mathscr{C}$ est donc fermé dans l'espace complet $(\mathscr{B}, \|.\|_\infty)$. Il en résulte que $(\mathscr{C}, \|.\|_\infty)$ est complet.

PARTIE II

1. Le fait que I est une norme sur $\mathscr{C}$ résulte des propriétés de l'intégrale des fonctions continues sur un segment.
L'intégrale d'une fonction positive ou nulle est positive ou nulle. On en déduit que $I(f) \geq 0$. D'autre part, l'intégrale sur $[0,1]$ d'une fonction continue positive ou nulle est nulle si, et seulement si, la fonction est nulle.
Comme on a $|f| \geq 0$, on en déduit

$$I(f) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in [0,1], \quad f(x) = 0.$$

Les autres propriétés sont évidentes.

2. (a) On a $\forall x \in [0,1]$, $f(x) \leq \|f\|_\infty$. On en déduit

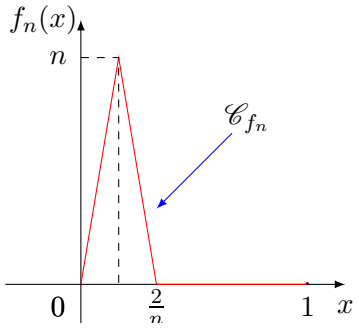
$$I(f) = \int_0^1 |f(x)|dx \leq \int_0^1 \|f\|dx = \|f\|_\infty,$$

c'est-à-dire $I(f) \leq \|f\|_\infty$. Il suffit donc de prendre $k = 1$.

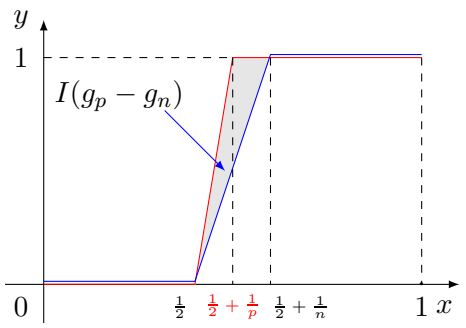
(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f_n est affine par morceaux. Les seuls points éventuels de discontinuité sont $x = \dfrac{1}{n}$ et $x = \dfrac{2}{n}$. Des calculs simples montrent que f_n est continue en ces deux points. On a donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n \in \mathscr{C}$.
On vérifie facilement que $\|f_n\|_\infty = n$ et $I(f_n) = 1$.

(c) Des égalités $\|f_n\|_\infty = n$ et $I(f_n) = 1$, on déduit que l'application $f \mapsto \dfrac{\|f\|_\infty}{I(f)}$ n'est pas bornée sur $\mathscr{C}\backslash\{0\}$. Les deux normes $\|.\|_\infty$ et I ne sont donc pas équivalentes sur $\mathscr{C}$.

3. (a) Pour tout entier $n \geq 2$, la fonction g_n est affine par morceaux. Les seuls points éventuels de discontinuité sont $x = \dfrac{1}{2}$ et $x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n}$. Des calculs simples montrent que g_n est continue en ces deux points. On a donc $\forall n \geq 2, \quad g_n \in \mathscr{C}$.



Pour $p \geq n \geq 2$, on a $\forall x \in [0,1]$, $g_p(x) \geq g_n(x)$. $I(g_p - g_n)$ est donc l'aire de la partie du plan limité par les deux courbes de g_p et g_n,



d'où :

$$I(g_p - g_n) = \frac{1}{2}\left(1 \times \frac{1}{p}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{p}\right) \times 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} \times 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{p}\right).$$

Il en résulte $\forall p \geq 2, \forall n \geq 2$, $I(g_p - g_n) = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{p}\right|$. La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Pour tout ε, il existe donc un entier n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0, \ \ \forall p \geq n_0, \ \ \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{p}\right| \leq 2\varepsilon.$$

On en déduit que

$$\forall n \geq n_0, \ \ \forall p \geq n_0, \ \ I(g_p - g_n) \leq \varepsilon.$$

La suite $(g_n)_{n\geq 2}$ est donc une suite de Cauchy dans $\mathscr{C}$ pour la norme I.

(b) Supposons que la suite $(g_n)_{n\geq 2}$ converge vers une fonction $g \in \mathscr{C}$. On a

$$I(g_n - g) = \int_0^{\frac{1}{2}} |g(x)|dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} |g_n(x) - g(x)|dx + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^{1} |1 - g(x)|dx.$$

On en déduit les deux inégalités :

$$(1) \quad \int_0^{\frac{1}{2}} |g(x)|dx \leq I(g_n - g),$$

et

$$(2) \quad \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^{1} |1 - g(x)|dx \leq I(g_n - g).$$

De (1) et de $\lim\limits_{n\to\infty} I(g_n - g) = 0$, il en résulte que $\int_0^{\frac{1}{2}} |g(x)|dx = 0$ et donc g est nulle sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Soit $x_0 \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $x_0 \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$. De l'égalité (2), il en résulte donc $\forall n \geq n_0$, $\int_{x_0}^{1} |1 - g(x)|dx \leq I(g_n - g)$ et donc $\int_{x_0}^{1} |1 - g(x)|dx = 0$, puis $\forall x \in [x_0, 1]$, $g(x) = 1$.

D'où $\forall x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]$, $g(x) = 1$. On a $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} g(x) = 1$ et $g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. La fonction g n'est donc pas continue au point $\frac{1}{2}$, ce qui est absurde.

Donc la suite $(g_n)_{n\geq 2}$, qui est de Cauchy dans $(\mathscr{C}, I)$, ne converge pas dans $\mathscr{C}$. Il en résulte que $(\mathscr{C}, I)$ n'est pas complet.

Problème II

PARTIE I

1. L'application $X \mapsto (F|X)$ est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle car $(F|F) \neq 0$. Par conséquent son noyau H est un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2. On a

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Posons $Y = {}^tFX$, alors on a pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $y_{ii} = \sum_{k=1}^{n} f_{ki}x_{ki}$, et donc

$$(F|X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f_{ki}x_{ki} = \sum_{k=1}^{n} f_{k1}x_{k1} + \sum_{k=1}^{n} f_{kn}x_{kn} + \sum_{k=2}^{n-1} f_{kk}x_{kk}.$$

Car si $i = k$ ou $i = n$ ou $i = 1$, alors $f_{ki} = 1$ et sinon $f_{ki} = 0$. On obtient donc

$$(F|X) = \sum_{k=1}^{n} x_{k1} + \sum_{k=1}^{n} x_{kn} + \sum_{k=2}^{n-1} x_{kk}.$$

3. Puisque $(F|F) \neq 0$, alors $F \in H^{\perp}$. Donc $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = H \oplus \mathrm{Vect}(F)$. Notons p_H la projection orthogonale sur H. Remarquons que

$$M = (M - p_H(M)) + p_H(M)$$

Donc pour tout $U \in H$, le théorème de Pythagore donne :

$$\|M - U\|^2 = \|M - p_H(M) + p_H(M) - U\|^2 = \|M - p_H(M)\|^2 + \|p_H(M) - U\|^2,$$

puisque $M - p_H(M) \in H^{\perp}$ et $p_H(M) - U \in H$. Le calcul precedent montre que $\|M - U\|^2$, et donc $\|M - U\|$, admet un minimum qui est atteint en $U = p_H(M)$, et qui vaut

$$\min_{U \in H} \|M - U\| = \|M - p_H(M)\|$$

Comme $M - p_H(M) \in \mathrm{Vect}\, F$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $M - p_H(M) = \lambda F$ et donc $\lambda(F|F) = (M|F) - (p_H(M)|F) = (M|F)$, d'où

$$M - p_H(M) = \frac{(F|M)}{\|F\|^2}F.$$

Finalement, $d(M, H) = \dfrac{|(F|M)|}{\|F\|}$.

4. On a :

$$||F||^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f_{ki}^2 = n + 2(n-1) = 3n - 2$$

Donc : $||F|| = \sqrt{3n-2}$.

5. (a) On a :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donc $\mathrm{rg}(B) = 2$

(b) On a :

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donc $\mathrm{rg}(B^2) = 2$.
On en déduit $\mathrm{rg}(B) = \mathrm{rg}(B^2) = 2$.

(c) D'après le théorème du rang on a : $\dim(\ker(g)) + \dim(\mathrm{Im}(g)) = n$, donc pour conclure il suffit de montrer que $\ker(g) \cap \mathrm{Im}(g) = \{0\}$.
Si $x \in \ker(g) \cap \mathrm{Im}(g)$, alors $g(x) = 0$ et il existe un y tel que $x = g(y)$. Donc $g^2(y) = 0$. Ainsi $y \in \ker(g^2)$. Mais $\ker(g) \subset \ker(g^2)$ et $\dim(\ker(g)) = n - 2 = \dim(\ker(g^2))$, car $\mathrm{rg}(B) = \mathrm{rg}(B^2) = 2$. Donc $\ker(g^2) = \ker(g)$. On a donc $y \in \ker(g)$ donc $x = g(y) = 0$. Par conséquent $\ker(g) \oplus \mathrm{Im}(g) = \mathbb{R}^n$.

(d) Prenons une base $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_{n-2}, e_{n-1}, e_n)$ adaptée à la somme directe

$$\mathbb{R}^n = \ker(g) \oplus \mathrm{Im}(g).$$

On a $g(e_k) = 0_E$ pour tout $k \in [\![1, n-2]\!]$ et $g(e_k) \in \mathrm{Im}(g) = \mathrm{Vect}(e_{n-1}, e_n)$ pour tout k, spécialement pour $k \in \{n-1, n\}$. Donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g) = \begin{pmatrix} \mathrm{O} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{B}' \end{pmatrix} \text{ avec } B' \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).$$

De plus $\mathrm{rg}(g) = \mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)) = \mathrm{rg}(B') = 2$. Donc B' est inversible . Par conséquent B est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \mathrm{O} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{B}' \end{pmatrix}$ avec $B' \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$.

(e) Il est clair que $\mathrm{tr}(B) = 0$ et que $\mathrm{tr}(B^2) = 2$. Soient a et b les valeurs propres de B' a priori quelconques (pas forcement distincts) dans $\mathbb{C}$.
B' est trigonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$. Donc B' est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ où $c \in \mathbb{C}$. Donc B'^2 est semblable à $\begin{pmatrix} a^2 & c(a+b) \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$.
Or, d'après la question précédente, on a d'une part $\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(B')$, donc $a+b = 0$. D'autre part B^2 est semblable à $\begin{pmatrix} \mathrm{O} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{B}'^2 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{tr}(B^2) = \mathrm{tr}(B'^2)$, soit $a^2 + b^2 = 2$. Alors $\begin{cases} a^2 + b^2 = 2 \\ a + b = 0 \end{cases}$.
On en déduit directement que : $\mathrm{Sp}(B') = \{-1, 1\}$.

(f) On pose $E_\lambda(F)$ le sous espace propre de Fassocié à la valeur propre λ de F. On a alors :

$$x \in E_\lambda(F) \iff Fx = \lambda x \iff (I_n + B)x = \lambda x \iff Bx = (\lambda - 1)x.$$

Donc $\text{Sp}(F) = \{1 + \mu / \mu \in \text{Sp}(B)\}$, d'où $E_\lambda(F) = E_{\lambda-1}(B)$. On note χ_M le polynôme caractéristique d'une matrice M quelconque. On a alors :

$$\chi_B = X^{n-2}\chi_{B'} = X^{n-2}(X+1)(X-1)$$

et

$$\text{Sp}(B) = \{-1, 0, 1\}.$$

Et puisque $m(1) = m(-1) = 1$. ($m(\lambda)$ désigne l'ordre de la multiplicité associée à la valeur propre λ), donc $\dim(E_{-1}(B)) = \dim(E_1(B)) = 1$.
D'autre part $\dim(E_0(B)) = \dim(\ker(g)) = n-2$, et par conséquent $\text{Sp}(F) = \{0, 1, 2\}$ avec : $\dim(E_0(F)) = \dim(E_2(F)) = 1$ et $\dim(E_1(F)) = n-2$.

6. Calculons $(F|P({}^tF))$, on a :

$$(F|P({}^tF)) = \text{tr}({}^tFP({}^tF)) = \text{tr}(S({}^tF)) \text{ avec } S(X) = XP(X).$$

Or, d'après ce qui précède, $\dim(E_0(F)) + \dim(E_2(F)) + \dim(E_1(F)) = n$, donc :

$$\mathbb{R}^n = E_0(F) \oplus E_2(F) \oplus E_1(F),$$

c'est-à-dire F est diagonalisable donc ${}^tF$ également. Ainsi $S({}^tF)$ est semblable à la matrice diagonale

$$\text{diag}(S(1), ..., S(1), S(0), S(2)).$$

Donc $\text{tr}(S({}^tF)) = (n-2)S(1) + S(0) + S(2) = (n-2)P(1) + 2P(2)$, d'où, en tenant compte de la question 3. de cette partie,

$$d(P({}^tF), H) = \frac{|(n-2)P(1) + 2P(2)|}{\sqrt{3n-2}}.$$

PARTIE II

1. (a) D'après la caractérisation de la borne inférieure, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists y \in H \text{ tel que } d(x_0, H) \leq ||x_0 - y|| < d(x_0, H) + \varepsilon.$$

En particulier, pour $\varepsilon = \dfrac{1}{2^n}$ avec $n \in \mathbb{N}$, il existe $y_n \in H$ vérifiant

$$d(x_0, H) \leq ||x_0 - y_n|| < d(x_0, H) + \frac{1}{2^n}.$$

Donc il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de H telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{n\to\infty} ||x_0 - y_n| = d(x_0, H)$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$||y_n|| = ||y_n - x_0 + x_0|| \leq ||y_n - x_0|| + ||x_0||,$$

et puisque $(||x_0 - y_n||)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite bornée, car elle est convergente. Donc$(||y_n||)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée. Donc, d'après le Théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une suite $(y_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ extraite de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans E.
Comme E est de dimension finie, tous ses sous-espaces sont fermés, cela veut dire que H est fermé de E, donc $\lim\limits_{n\to\infty} y_{\varphi(n)} \in H$.

(c) Par continuité de la norme, on a :

$$\lim_{n\to\infty} ||x_0 - y_{\phi(n)}|| = ||x_0 - \lim_{n\to\infty} y_{\phi(n)}||.$$

Notons $\lim\limits_{n\to+\infty} y_{\phi(n)} = y_0$. On obtient, par unicité de la limite $||x_0 - y_0|| = d(x_0, H)$. Donc il existe $y_0 \in H$ tel que $||x_0 - y_0|| = d(x_0, H)$.

2. (a) Par définition, $\ker(h) = h^{-1}(\{0\})$ avec $\{0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$. De plus, l'image réciproque d'un fermé par une application continue est un fermé, donc si h est continue alors $\ker(h)$ est un fermé dans E.

(b) Supposons que h est une forme linéaire non continue, donc elle n'est pas continue en 0, d'où :

$$\forall A \geq 0, \ \ \exists x \in E, \ \ |h(x)| > K||x||.$$

En particulier pour $A = n + 1$ avec $n \in \mathbb{N}$, il existe x_n de E vérifiant :

$$|h(x_n)| > (n + 1)||x_n||.$$

Donc $h(x_n) \neq 0$. On peut donc poser $t_n = \dfrac{x_n}{h(x_n)}$, et donc $h(t_n) = \dfrac{h(x_n)}{h(x_n)} = 1$ et

$$||t_n|| = \frac{||x_n||}{|h(x_n)|} < \frac{1}{n+1}.$$

Donc $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 0$.
D'autre part, on a $\forall n \in \mathbb{N}, h(t_n - t_0) = h(t_n) - h(t_0) = 1 - 1 = 0$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \ \ t_n - t_0 \in H$ et $\lim\limits_{n\to\infty}(t_n - t_0) = -t_0$.
Or H étant un fermé, donc $-t_0 \in H$, ceci est absurde du fait que $h(-t_0) = -h(t_0) = -1$. Donc h est bien continue si $\ker H$ est un fermé dans E.

(c) On a : $H \subset \bar{H}$, donc $\bar{H} \neq \emptyset$.
Soient $x, y \in \bar{H}$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Il existe donc deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de H telles que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ et $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Donc, par linéarité de la limite

$$x + \lambda y = \lim_{n\to+\infty}(x_n + \lambda y_n)$$

avec $x_n + \lambda y_n \in H$ pour tout entier n. On en déduit que $x + \lambda y \in \bar{H}$ D'où $\bar{H}$ est un sous -espace vectoriel de E.

(d) Puisque $H \subset \bar{H}$, on a $H = \bar{H}$ et dans ce cas H est fermé. Sinon $H \subsetneq \bar{H}$, et dans ce cas on doit montrer que H est dense dans E.
Soit $a \in \bar{H}\backslash H$ et soit $x \in E$. On a $h(a) \neq 0$ car $a \notin H$. Donc, on peut écrire

$$x = \frac{h(x)}{h(a)}a + \left(x - \frac{h(x)}{h(a)}a\right),$$

avec $a \in \bar{H}$ et

$$h\left(x - \frac{h(x)}{h(a)}a\right) = h(x) - \frac{h(x)}{h(a)}h(a) = 0.$$

Alors $x - \dfrac{h(x)}{h(a)}a \in H \subset \bar{H}$. Puisque $\bar{H}$ est un sous-espace vectoriel de E, $x \in \bar{H}$. Ce qui donne : $E \subset \bar{H}$. On en déduit que H est dense dans E.

PARTIE III

1. Soit $x \in H^{\perp}$. Puisque H est dense dans E, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de H qui converge vers x.
On a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ \ (x|x_n) = 0$. Mais, par continuité du produit scalaire, la suite $(x|x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\to\infty}(x|x_n) = (x|x)$. Donc $(x|x) = 0$, et par conséquent $x = 0$. Donc $H^{\perp} = \{0\}$.

2. On a $H \oplus H^{\perp} = H \oplus \{0\}$. D'où $H \oplus H^{\perp} = H$.

3. Pour tout x appartenant à E, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de H qui converge vers x. Or, d'après la définition de la distance et du fait que $\forall n \in \mathbb{N},\ \ x_n \in H$, on a :

$$0 \leq d(x, H) \leq ||x - x_n||.$$

De plus $\lim\limits_{n\to\infty} ||x - x_n|| = 0$, d'où $\forall x \in E,\ \ d(x, H) = 0$.

4. Si $d(x, H)$ est atteinte, alors il existerait un $z_0 \in H$ tel que $0 = d(x, H) = ||x - z_0||$ et donc $x = z_0$ et $x \in H$. La réciproque est évidente.
En conclusion $d(x, H)$ est atteinte si, et seulement si, $x \in H$.

●●●●●●●●●●