Devoir surveillé $n°3$
Correction

Exercice

1. L'application Φ est bien définie de Ω dans Ω. Soit $(r,t)\in\Omega$. La relation $\Phi(x,y)=(r,t)$ s'écrit sous la forme
$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}=r\\ \dfrac{y}{x}=t\end{cases}$$
Donc il existe un unique couple $(x,y)\in\Omega$ tel que $\Phi(x,y)=(r,t)$, c'est le couple définie par $\left(\dfrac{r}{\sqrt{1+t^2}},\dfrac{rt}{\sqrt{1+t^2}}\right)$. Ainsi Φ réalise une bijection de Ω sur Ω. On vérifie aisément que Ω est un ouvert (par image réciproque d'un ouvert par une application continue) et que Φ ainsi que Φ^{-1} sont de classe $\mathscr{C}^1$.
La matrice jacobienne de Φ est donnée par :
$$\begin{pmatrix}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ \dfrac{-y}{x^2} & \dfrac{1}{y}\end{pmatrix}.$$

2. On a $\forall(r,t)\in\Omega$, on a $g(r,t)=f\circ\Phi^{-1}(r,t)$. Donc g est de classe $\mathscr{C}^1$ comme composée de deux applications de classe $\mathscr{C}^1$, d'où $g\in E$.
3. La linéarité de l'application $T : f\longmapsto T(f)$ découle de celle des applications dérivées partielles. De plus si $f\in E$, $Tf\in E$, donc T est un endomorphisme de E.
4. Les formules du cours donnent : $\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial g}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial x}+\dfrac{\partial g}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial x}\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial g}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial y}+\dfrac{\partial g}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial y}\end{cases}$, on en déduit $\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{x}{r}\dfrac{\partial g}{\partial r}-\dfrac{y}{x^2}\dfrac{\partial g}{\partial t}\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{y}{r}\dfrac{\partial g}{\partial r}+\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial g}{\partial t}\end{cases}$.
D'où $\forall(x,y),\ \ Tf(x,y)=x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=r\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,t)$.
5. $f\in E_0$ si, et seulement si, $r\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,t)=0$, donc $g(r,t)$ est de la forme $g(r,t)=h(t)$ où h est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ d'une seule variable.
Donc
$$E_0=\{h\circ t/h\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R})\}.$$
6. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. La relation $Tf=\lambda f$ s'écrit $\forall(r,t)\in\Omega,\ \ r\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,t)=\lambda g(r,t)$, donc $g(r,t)=h(t)r^\lambda$ où h est une fonction d'une seule variable. Ceci montre que tout réel λ est une valeur propre de T et que le sous-espace propre E_λ est l'ensemble des fonctions de la forme
$$(x,y)\longmapsto h\left(\frac{y}{x}\right)(x^2+y^2)^{\frac{\lambda}{2}},$$
où h est une fonction d'une seule variable de classe $\mathscr{C}^1$.

Problème

Partie I

1. Puisque u admet n valeurs propres distinctes, donc son polynôme caractéristique scindé à racines simples, donc u est digonalisable, c'est-à-dire E admet une base de vecteurs propres de u dans laquelle la matrice de u est diagonale.

2. (a) Il est clair que $u \circ v = \left(\sum_{i=0}^{N} a_i u^{i+1}\right) = \left(\sum_{i=0}^{N} a_i u^i\right) \circ u = v \circ u$.

(b) Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de vecteurs de u telle que $u(e_i) = \lambda_i e_i$. Alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $v(e_i) = P(u)(e_i) = P(\lambda_i)e_i$, ceci montre que E admet une base de vecteurs propres de v, donc v est digonalisable.

(c) D'après la question précédente, Sp$(u) = \{P(\lambda_i)/i \in [\![1, n]\!]\}$ et $\det v = \prod_{i=1}^{n} P(\lambda_i)$.

3. (a) On vérifie facilement que le polynôme caractéristique de A est $\chi_A = X^5 - 1$, donc Sp $= \{w_k = e^{\frac{2ik\pi}{5}}/k \in [\![0, 4]\!]\}$.

(b) Les calculs montrent que $B = 5I_5 + A + 2A^2 + 3A^3 + 4A^4$. D'après la question 2., on a

$$\text{Sp}(B) = \{Q(w_k)/k \in [\![0, 4]\!]\} \text{ et } \det B = \prod_{k=0}^{4} Q(w_k),$$

où $Q = 5 + X + 2X^2 + 3X^3 + 4X^4$.

(c) On vérifie aisément que $(z - 1)(5z^5 + 4z^4 + 3z^3 + 2z^2 + z) = 5z$.

(d) D'après ce qui précède

$$\begin{aligned}\det B &= \prod_{k=0}^{4} Q(w_k) = \prod_{k=0}^{4} \frac{5 \times w^k}{w^k - 1} = \frac{15 \times 5^4 \times w^{10} \times w^3}{(w-1)(w^2-1)(1-w^2)(1-w)} = \frac{15 \times 5^4 \times w^3}{5 \times w^3} \\ &= 3 \times 5^4.\end{aligned}$$

4. (a) Puisque $u \circ v = v \circ u$, alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $u(v(e_i)) = \lambda_i v(e_i) \in E_{\lambda_i} = \text{Vect}(e_i)$, donc il existe $\mu_i \in \mathbb{C}$ tel que $v(e_i) = \mu_i e_i$.

(b) L'application φ est linéaire, injective et les espaces de départ et d'arrivée sont de même dimension finie, il en découle que φ est une bijection et on en déduit le résultat demandée.

(c) On a, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $v(e_i) = \mu_i e_i = P(u)e_i$, donc v et $P(u)$ coïncident dans une base, donc $v = P(u)$.

5. (a) i$\Longrightarrow$ii d'après 4.a).
ii$\Longrightarrow$iii d'après 4.c).
iii$\Longrightarrow$i d'après 2.a).

(b) L'application $\psi : P \longmapsto P(u)$ est un morphisme d'algèbre de $\mathbb{C}[X]$ dans $\mathscr{L}(E)$, donc $\mathscr{C}_u = \text{Im}\psi$ est une sous-algèbre de $\mathscr{L}(E)$, donc est une algèbre sur $\mathbb{C}$. De plus

$$\forall P, Q \in \mathbb{C}[X], \quad P(u)Q(u) = Q(u)P(u),$$

donc $\mathscr{C}_u$ est une algèbre commutative.

6. (a) On a $\chi_A(X) = \det(XI_3 - A) = X(X-1)(X-2)$, donc Sp$(A) = \{0, 1, 2\}$. On prend $P = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a donc $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(b) On a $BA = B^4 = B^3B = AB$.
Soit $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$. Si $B^3 = A$ alors B et A commutent. A admet trois valeurs propres simples à savoir 0, 1 et 2. Donc A est diagonalisable et les sous-espaces propres de A sont des droites. B commute avec A et donc laisse stable les trois droites propres de A. Ainsi une base de $\mathbb{C}^3$ formée de vecteurs propres de A est également une base de vecteurs propres de B ou encore, si P est une matrice inversible telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale D alors pour la même matrice P, $P^{-1}BP$ est une matrice diagonale Δ. De plus
$$B^3 = A \Leftrightarrow P\Delta^3P^{-1} = PDP^{-1} \Leftrightarrow \Delta^3 = D \Leftrightarrow \Delta = \text{diag}(0, \varepsilon_1, \varepsilon_2\sqrt[3]{2})$$
avec $\varepsilon_1^3 = \varepsilon_2^3 = 1$, ce qui fournit neuf solutions distinctes.
On peut prendre $P = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ puis $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \\ \frac{3}{2} & -2 & 6 \end{pmatrix}$. D'où les solutions de l'équation (1) $B^3 = A$:
$$P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2\sqrt[3]{2} \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} -4\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2\sqrt[3]{2} & 8\varepsilon_1 - 4\varepsilon_2\sqrt[3]{2} & -20\varepsilon_1 + 12\varepsilon_2\sqrt[3]{2} \\ \frac{3}{2}\varepsilon_2\sqrt[3]{2} & -2\varepsilon_2\sqrt[3]{2} & 6\varepsilon_2\sqrt[3]{2} \\ \varepsilon_1 & -2\varepsilon_1 & 5\varepsilon_1 \end{pmatrix}.$$
où $\varepsilon_1^3 = \varepsilon_2^3 = 1$.

Partie II

1. Soient $\lambda \in \text{Sp}(v)$ et $x \in E_\lambda(v)$. Puisque A et B commutent, alors u et v commutent et donc comme $x \in E_\lambda(v)$, on a $v(u(x)) = u(v(x)) = u(\lambda x)$. D'où $v(u(x)) = \lambda u(x)$ car u est linéaire et par conséquent $u(x) \in E_\lambda(v)$.

2. (a) Si B admet une unique valeur propre λ, puisque par hypothèse B est diagonalisable alors B est semblable à la matrice λI_3. Il existe donc une matrice Q inversible telle que $B = Q(\lambda I_3)Q^{-1} = \lambda I_3$.

(b) La matrice A étant diagonalisable, il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale. De plus, $P^{-1}BP = P^{-1}(\lambda I_3)P = \lambda I_3$ est diagonale. Donc il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient diagonales.

3. (a) Par définition d'une valeur propre, on a pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$, $\dim E_{\lambda_i}(v) \geq 1$. De plus, v étant diagonalisable, et ces trois valeurs propres étant distinctes, on a également
$$\sum_{i=1}^{3} \dim E_{\lambda_i}(v) = 3.$$
On peut donc conclure que $\forall \lambda \in \text{Sp}(v)$, $\dim E_\lambda(v) = 1$.

(b) D'après la question $II.1$, si $x \in E_\lambda(v)$ alors $f(x) \in E_\lambda(v)$. Or $E_\lambda(v)$ est une droite vectorielle donc x et $u(x)$ sont colinéaires. Enfin, x étant non nul, on en déduit qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) = \mu x$.

(c) L'endomorphisme u étant diagonalisable, il existe une base de vecteurs propres de v. Le résultat précédent prouve en outre que tout vecteur propre de g est également un vecteur propre de v. On peut donc conclure qu'il existe une base de E composée de vecteurs propres communs à u et v.

4. (a) On a $E_{\lambda_1}(v) \cap E_{\lambda_2}(v) = \{0\}$, de plus v étant diagonalisable, on a donc

$$\dim E_{\lambda_1}(v) + \dim E_{\lambda_2}(v) = \dim(E),$$

ce qui prouve que $E_{\lambda_1}(v)$ et $E_{\lambda_2}(v)$ sont supplémentaires dans E. D'où

$$E = E_{\lambda_1}(v) \oplus E_{\lambda_2}(v).$$

(b) Puisque $E_{\lambda_1}(v)$ et $E_{\lambda_2}(v)$ sont supplémentaires dans E, et comme $E_\mu(u) \subset E$, alors pour tout $x \in E_\mu(u)$ il existe un unique couple (x_1, x_2) de $E_{\lambda_1}(v) \times E_{\lambda_2}(v)$ tel que

$$x = x_1 + x_2.$$

On a alors $u(x) = \mu x$ d'où $u(x_1 + x_2) = \mu(x_1 + x_2)$ et donc $u(x_1) - \mu x_1 = \mu x_2 - u(x_2)$.

Or d'après le résultat de la question II.1, puisque $x_1 \in E_{\lambda_1}(v)$, alors $u(x_1) \in E_{\lambda_1}(v)$, et donc $f(x_1) - \mu x_1 \in E_{\lambda_1}(v)$. De même $u(x_2) - \mu x_2 \in E_{\lambda_2}(v)$.

Or $E_{\lambda_1}(v) \cap E_{\lambda_2}(v) = \{0\}$, donc $u(x_1) - \mu x_1 = \mu x_2 - u(x_2) = 0$. On a donc $u(x_1) = \mu x_1$ et $u(x_2) = \mu x_2$, d'où la conclusion.

(c) Le résultat précédent prouve que pour tout $x \in E_\mu(u)$, il existe $x_1 \in E_{\lambda_1}(v) \cap E_\mu(u)$ et $x_2 \in E_{\lambda_2}(v) \cap E_\mu(u)$ tel que $x = x_1 + x_2$. On a ainsi démontré :

$$E_\mu(u) = (E_{\lambda_1}(v) \cap E_\mu(u)) + (E_{\lambda_2}(v) \cap E_\mu(u)).$$

De plus, si $x \in (E_{\lambda_1}(v) \cap E_\mu(u)) \cap (E_{\lambda_2}(v) \cap E_\mu(u))$, alors $x \in E_{\lambda_1}(v) \cap E_{\lambda_2}(v)$ donc $x = 0$, d'où le résultat :

$$(E_\mu(u) \cap E_{\lambda_1}(v)) \oplus \left(E_\mu(u) \cap E_{\lambda_{2(v)}}\right) = E_\mu(u).$$

En juxtaposant une base de $E_{\lambda_1}(v) \cap E_\mu(u)$ et une base de $E_{\lambda_2}(v) \cap E_\mu(u)$ on obtient donc une base de $E_\mu(u)$ constituée alors de vecteurs propres de v.

(d) D'après le résultat précédent, chacun des sous-espaces propres associés à u, possède une base constituée de vecteurs propres de v. En juxtaposant ces bases, u étant diagonalisable, on obtient une base de E composée de vecteurs propres communs à u et v.

• • • • • • • • • • •