Devoir surveillé $n°4$
Correction

Exercice 1

1. Si $x \leq 0$, le terme général de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ ne tend pas vers 0, donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ diverge. Si $x > 0$, alors $0 \leq f_n(x) \leq e^{-nx}$ ($\ln(1+x) \leq x$ si $x > 0$) et la série géométrique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (e^{-x})^n$ converge, donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge. Donc $D =]0, +\infty[$.

2. On a $\|f_n\|_\infty = 1$, donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ ne converge pas normalement sur D.
Si $n \in \mathbb{N}$ et $x \in D$, alors $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \geq f_{n+1}(x)$, donc $\|R_n\|_\infty \geq \|f_{n+1}\| = 1$, donc $\|R_n\|_\infty$ ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers l'infini, donc la convergence de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ n'est pas uniforme sur D.

3. Sur $[a, +\infty[$, f_n est décroissante donc majorée par $f_n(a)$, donc la convergence de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ est normale sur $[a, +\infty[$.

4. On a, pour tout $x > 0$,

$$0 < f(x) - \ln(2) \leq \sum_{n=1}^{\infty}(e^{-x})^n = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}.$$

Donc $\lim_{x\to\infty} f(x) = \ln(2)$.

5. La convergence de $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est normale donc uniforme sur chaque $[a, +\infty[$ ($a > 1$) et les f_n sont continues, donc la somme f est elle-même continue sur chaque $[A, +\infty[$, donc f est continue sur $]0, +\infty[$.
Chaque f_n est de classe $\mathscr{C}^1$, avec $f_n'(x) = \frac{-ne^{-nx}}{1+e^{-nx}}$, donc $|f_n'(x)| \leq ne^{-nx} \leq ne^{-na} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ pour tout $x \in [a, +\infty[$ ($a > 0$), donc on a convergence normale de $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n'$ et simple de $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$, donc f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur chaque $[a, +\infty[$, puis f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
Soit maintenant $p \in \mathbb{N}^*$ fixé et $a > 0$. On peut montrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n^{(k)}(x) = \frac{n^k P_k(e^{-x})e^{-nx}}{(1+e^{-nx})^k},$$

où P_k est un polynôme . Si on fixe $k \in \mathbb{N}^*$ et $a > 0$, on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sup_{x\in[a,+\infty[} |f_n^{(k)}(x)| \leq n^k e^{-na} \sup_{x\in[0,1]} |P_k(x)| = 0\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Par conséquent, d'après le théorème du cours, f est de classe $\mathscr{C}^p$ sur $]0, +\infty[$.

6. On sait que $0 < \ln(1+e^{-nx}) \leq e^{-nx}$, on obtient donc :

$$0 \leq f(x) - \ln(2) - \ln(1+e^{-x}) \leq \sum_{n=2}^{\infty} e^{-nx} = \frac{e^{-2x}}{1-e^{-x}},$$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)-\ln(2)}{e^{-x}} = 1$, donc $f(x) - \ln(2) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x}$.

7. Pour $x > 0$ fixé, on pose $u_x(t) = \ln(+e^{-tx})$. On a donc $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_x(n)$. L'application u_x étant décroissante, donc on a :

$$\int_n^{n+1} u_x(t)\mathrm{d}t \leq u_x(n) \leq \int_{n-1}^{n} u_x(t)\mathrm{d}t.$$

Par sommation, on obtient :

$$\int_0^{n+1} u_x(t)\mathrm{d}t \leq \sum_{k=0}^{n} u_x(k) \leq u_x(0) + \int_0^n u_x(t)\mathrm{d}t.$$

Le changement de variable $s = e^{-tx}$ fournit $\displaystyle\int_0^n u_x(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_{e^{-nx}}^{1} \frac{\ln(1+s)}{s}\mathrm{d}s$.

La fonction $s \mapsto \dfrac{\ln(1+s)}{s}$ est continue sur $]0,1]$ et se prolonge par continuité en 0 (par 1), donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^n u_x(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{\ln(1+s)}{s}\mathrm{d}s$, d'où l'encadrement :

$$\frac{1}{x}\int_0^1 \frac{\ln(1+s)}{s}\mathrm{d}s \leq f(x) \leq \ln(2) + \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{\ln(1+s)}{s}\mathrm{d}s,$$

on obtient donc l'équivalence

$$f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{\ln(1+s)}{s}\mathrm{d}s = \frac{\pi^2}{12x}.$$

(*pour la valeur de l'intégrale* $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+s)}{s}\mathrm{d}s$ *voir le devoir libre n°6*).

Exercice 2

1. Soit $x \in [0,1]$ fixé. La suite $\left(\dfrac{x^2+n}{n^2}\right)_{n\geq 1}$ est décroissante, positive et tend vers 0, donc la série alternée $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^n \left(\frac{x^2+n}{n^2}\right)$ est convergente, d'après le critère spécial des séries alternées.

Toujours d'après le théorème des séries alternées, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1], \quad |R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| \leq \left|(-1)^{n+1}\frac{x^2+n+1}{(n+1)^2}\right| \leq \frac{n+2}{(n+1)^2}$$

Inégalité qui montre que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^n \left(\frac{x^2+n}{n^2}\right)$ est uniformément convergente sur $[0,1]$.

Pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$|f_n(x)| = \frac{x^2}{n^2} + \frac{1}{n}$$

Donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}|f_n(x)|$ converge si, et seulement si, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n}$ converge, donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}f_n(x)$ n'est pas absolument convergente.

2. (a) La suite $(\alpha)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant décroissante et positive, donc minoré et comme pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $\alpha_n\leq\alpha_1$, la suite $(\alpha)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc bornée.
Soit $M=\sup_{n\in\mathbb{N}^*}|\alpha_n|$. Pour tout $x\in[0,1[$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$|f_n(x)|\leq(1-x)Mx^n.$$

La série géométrique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}x^n$ étant convergente ($x\in[0,1[$), donc par comparaison, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}f_n(x)$ est absolument convergente, donc elle est convergente.

(b) Pour tout $x\in[0,1]$, $f_n'(x)=\alpha_n x^{n-1}(n-(n+1)x)$, donc la borne supérieure de f_n est atteint en $x_n=\dfrac{n}{n+1}$ et sa valeur est $\|f_n\|_\infty=f_n(x_n)=\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n\left(1-\dfrac{n}{n+1}\right)=\alpha_n\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$.
On a $\|f_n\|_\infty\sim\dfrac{1}{e}\dfrac{\alpha_n}{n}$, donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}f_n$ est normalement convergente si, et seulement si, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\|f_n\|_\infty$ est convergente ou encore si, et seulement si, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\dfrac{\alpha_n}{n}$ est convergente.

3. (a) Pour tout $x\in I$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$, $f(x)=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty}x^k=x^{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}x^k=\frac{x^{n+1}}{1-x}$.

(b) Pour tout $x\in I$, on a l'inégalité :

$$|R_n(x)|=\sum_{k=n+1}^{\infty}\alpha_k x^k(1-x)\leq\alpha_{n+1}x^{n+1}\leq\alpha_{n+1}.$$

Cette inégalité montre que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}f_n$ converge uniformément sur $[0,1[$.

(c) Pour tout $x\in[0,1[$ et $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}|R_n(x)| &= \sum_{k=n+1}^{+\infty}\alpha_k x^k(1-x)\\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty}\alpha_k x^k-\sum_{k=n+1}^{+\infty}\alpha_k x^{k+1}\\ &= \alpha_{n+1}x^{n+1}+\sum_{k=n+2}^{+\infty}(\alpha_k-\alpha_{k-1})x^k\\ &\geq \alpha_{n+1}x^{n+1},\end{aligned}$$

car $\alpha_k\leq\alpha_{k-1}$, donc $0\leq\alpha_{n+1}\leq\sup_{x\in[0,1[}|R_n(x)|$ et donc la convergence uniforme de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}f_n$, entraîne la convergence de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers 0.

Problème

Première partie

1. Pour tout réel $x \geq 1$ et tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $0 \leq \dfrac{1}{n^x} \leq \displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}$, d'où pour tout entier naturel $N \geq 1$:

$$0 \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} \leq 1 + \int_1^N \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leq 1 + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} = 1 + \frac{1}{x-1}.$$

Ceci montre que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^x}$ est convergente.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in]1, +\infty[$, $\;f_n^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^k(\ln n)^k}{n^x}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n^{(k)}$ converge simplement sur $]1, +\infty[$, puisque :

$$\forall x \in]1, +\infty[, \lim_{n\longrightarrow+\infty} n^{\frac{1+x}{2}} f_n^{(k)}(x) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{(-\ln n)^k}{n^{\frac{x-1}{2}}} = 0.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n^{(k)}$ converge normalement, donc uniformément, sur $[a, +\infty[$ car :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [a, b], |f_n^{(k)}(x)| = \frac{(\ln n)^k}{n^x} \leq \frac{(\ln n)^k}{n^a} = |f_n^{(k)}(a)|$$

En particulier les séries $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n'$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n''$ sont uniformément convergentes sur tout intervalle $[a, +\infty[$ contenu dans I.

Supposons que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge uniformément sur $I =]1, +\infty[$, alors $\|R_N\|_\infty^{]0,+\infty[} = \displaystyle\sup_{x\in I} |R_N(x)|$ tend vers 0 quand N tend vers l'infini. Mais $\forall x > 0$ et $\forall N, N' \in \mathbb{N}^*$ avec $N' > N$, on a

$$\sum_{n=N+1}^{N'} \frac{1}{n^x} \leq |R_N(x)| \leq \|R_N\|_\infty^I$$

Ceci entraîne, quand x tend vers 1 et N' tend vers $+\infty$, l'inégalité contradictoire

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n} \leq \|R_N\|_\infty^I,$$

puisque la série harmonique est divergente.

Le même raisonnement montre que les séries $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n'$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n''$ ne sont pas uniformément convergentes sur I.

2. (a) Les séries $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n'$ sont simplement convergentes sur I et la série et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n''$ est uniformément convergente sur tout intervalle $[a, +\infty[$ contenu dans I. Donc la fonction ζ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]1, +\infty[$ et

$$\forall k \in \{1, 2\}, \forall x \in]1, +\infty[, \;\; \zeta^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^k(\ln n)^k}{n^x}.$$

En particulier $\forall x \in I$, $\zeta'(x) < 0$ et $\zeta''(x) > 0$

(b) On a $\forall n \geq 1$ et $\forall x \in I$, $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leq \frac{1}{n^x} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}$ et donc $\displaystyle\int_{N+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leq R_N(x) \leq \int_N^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}$, d'où l'inégalité demandée :

$$\frac{1}{(x-1)(N+1)^{x-1}} \leq R_N(x) \leq \frac{1}{(x-1)N^{x-1}}.$$

Comme $R_N(x) = \zeta(x) - S_N(x)$, alors pour tout $x \in I$ et tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{1}{(x-1)(N+1)^{x-1}} + S_N(x) \leq \zeta(x) \leq \frac{1}{(x-1)N^{x-1}} + S_N(x).$$

(c) Pour $N = 1$, on a pour tout $x \in I$, l'inégalité :

$$1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1},$$

d'où $\lim\limits_{x \to 1^+} \zeta(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \zeta(x) = 1$.

La dernière inégalité s'écrit encore $\dfrac{1}{2^{x-1}} \leq (x-1)(\zeta(x)-1) \leq 1$, comme $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{2^{x-1}} = 1$, alors $(x-1)(\zeta(x)-1) \underset{x \to 1}{\sim} 1$ ou encore $\zeta(x) \underset{x \to 1}{\sim} 1 + \dfrac{1}{x-1}$.

3. (a) Pour calculer une valeur approchée de $\zeta(4)$, il suffit de choisir $S_N(4)$ comme valeur approchée où N est donnée par l'inégalité $R_N(4) \leq 10^{-6}$.

• Pour $x = 4$, on a l'inégalité :

$$\frac{1}{(4-1)(N+1)^{4-1}} \leq R_N(4),$$

donc il suffit de choisir N tel que $3(N+1)^3 \geq 10^6$. Un calcul avec Maple donne $N = 69$ et $\zeta(4) \simeq S_{69}(4) = 1,082322$.

• Pour $x = \frac{7}{2}$, on trouve $N = 174$ et $\zeta(\frac{7}{2}) \simeq S_{174}(\frac{7}{2}) = 1.126732$.

• Pour $x = 3$, on trouve $N = 707$ et $\zeta(3) \simeq S_{707}(3) = 1.202055$.

(b)

x	1	$+\infty$
$\zeta'(x)$		$-$
$\zeta(x)$	$+\infty$ $\searrow$	1

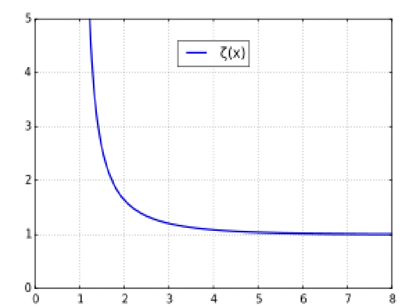

Tableau de variation et courbe de ζ.

Deuxième partie

1. (a) Soit F une primitive de la fonction continue $t \mapsto \dfrac{1}{n^x} - \dfrac{1}{t^x}$ sur $]0, +\infty[$, on a donc

$$\varphi_n(u) = F(n+u) - F(n-u).$$

F étant de classe $\mathscr{C}^\infty$, c'est la primitive d'une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$, donc φ_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.

On a clairement $\varphi_n(0) = 0$ et $\varphi_n'(u) = \dfrac{1}{(n-u)^x} - \dfrac{1}{(n+u)^x}$, donc $\varphi_n'(0) = 0$. De même $\varphi_n''(u) = \dfrac{x}{(n+u)^{x+1}} - \dfrac{x}{(n-u)^{x+1}}$ et par conséquent $\varphi_n''(0) = 0$.

(b) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$ et tout $x \in I$,

$$\int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} + \varphi_n\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} + \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{t^x}\right)\mathrm{d}t = \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{n^x} = \frac{1}{n^x} = f_n(x).$$

(c) Appliquons la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 3 à la fonction φ_n :

$$\begin{aligned}\varphi_n\left(\frac{1}{2}\right) &= \varphi_n(0) + \frac{1}{2}\varphi_n'(0) + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2!}\varphi_n''(0) + \frac{1}{2!}\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - t\right)^2 \varphi_n^{(3)}(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2!}\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - t\right)^2 \varphi_n^{(3)}(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

D'autre part, $\varphi_n^{(3)}(t) = -x(x+1)\left(\frac{1}{(n+t)^{x+2}} - \frac{1}{(n-t)^{x+2}}\right)$, on obtient donc, pour $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, l'encadrement

$$-x(x+1)\frac{2}{(n-1)^{x+2}} \leq \varphi^{(3)}(t) \leq -x(x+1)\frac{2}{(n+1)^{x+2}}.$$

D'où

$$\frac{1}{8}\int_0^{\frac{1}{2}} (1-2t)^2 \frac{2x(x+1)}{(n+1)^{x+2}}\mathrm{d}t \leq -\varphi_n\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{8}\int_0^{\frac{1}{2}} (1-2t)^2 \frac{2x(x+1)}{(n-1)^{x+2}}\mathrm{d}t,$$

ou encore

$$\frac{x(x+1)}{24(n+1)^{x+2}} \leq -\varphi_n\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{x(x+1)}{24(n-1)^{x+2}}.$$

(d) On sait que $-\varphi_n\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} - f_n(x)$, d'où

$$\frac{x(x+1)}{24(n+1)^{x+2}} \leq \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} - f_n(x) \leq \frac{x(x+1)}{24(n-1)^{x+2}}.$$

Donc

$$(*)\quad \frac{x(x+1)}{24}\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{x+2}} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty}\int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} - R_N(x) \leq \frac{x(x+1)}{24}\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^{x+2}}.$$

On a aussi

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} = \frac{1}{1-x}\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\frac{1}{(n+\frac{1}{2})^{x-1}} - \frac{1}{(n-\frac{1}{2})^{x-1}}\right) = \frac{1}{x-1}\frac{1}{(N+\frac{1}{2})^{x-1}}.$$

D'autre part,

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^{x+2}} = R_{N-1}(x+2) \leq \frac{1}{(x+1)(N-1)^{x+1}}$$

et

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{x+2}} = R_{N+1}(x+2) \geq \frac{1}{(x+1)(N+2)^{x+1}}$$

en reportant dans l'inégalité $(*)$, on obtient l'inégalité demandée :

$$\frac{x}{24(N+2)^{x+1}} \leq \frac{1}{(x-1)\left(N+\frac{1}{2}\right)^{x-1}} - R_N(x) \leq \frac{x}{24(N-1)^{x+1}}.$$

2. D'après la question précédente, $\forall x > 1$ et $\forall N \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{1}{(x-1)\left(N+\frac{1}{2}\right)^{x-1}} - \frac{x}{24(N-1)^{x+1}} \leq R_N(x)$$

Cette inégalité permet de donner des valeurs approchées de $\zeta(x)$. Donc pour calculer une valeur approchée de $\zeta(x)$, il suffit de choisir $S_N(x)$ où N est donnée par l'inégalité $R_N(x) \leq 10^{-6}$. On trouve les valeurs suivantes :

$$\begin{array}{rcl} \zeta(1.1) & \simeq & 10.584448 \\ \zeta(1.01) & \simeq & 100.577943 \\ \zeta(1.005) & \simeq & 200.577579 \end{array}$$

Troisième partie

1. (a) On a, pour tout $x \in]0, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$g_{n+1}(x) - g_n(x) = \frac{1}{(n+1)^x} - \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} + \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t^x} = \frac{1}{(n+1)^x} - \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leq 0,$$

donc $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. De plus $g_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k^x} - \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \right) \geq 0$, donc la suite $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée (par 0), donc elle est convergente.

Sur $]1, +\infty[$, on a $g(x) = \zeta(x) - \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} = \zeta(x) - \frac{1}{x-1}$.

(b) Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a $g_{n+p}(x) - g_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} g_{n+k}(x) = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^x} - \int_n^{n+p} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}$, or

$$\frac{1}{(k+1)^x} \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leq \frac{1}{k^x}$$

donc

$$\sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{1}{(k+1)^x} \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{1}{k^x}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n+p)^x} - \frac{1}{n^x} &= \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{1}{(k+1)^x} - \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{1}{k^x} \\ &\leq \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{1}{(k+1)^x} - \sum_{k=n}^{n+p-1} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \\ &= \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{1}{(k+1)^x} - \int_n^{n+p} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}. \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{1}{(n+p)^x} - \frac{1}{n^x} \leq g_{n+p}(x) - g_n(x) \leq 0.$$

On obtient l'inégalité demandée en tendant p vers l'infini.

(c) Soit $a > 0$. On a pour tout $x \in [a, +\infty[$, $|g(x) - g_n(x)| \leq \dfrac{1}{n^a}$, donc la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers g sur tout intervalle $[a, +\infty[$ inclus dans $]0, +\infty[$, comme les g_n sont continues sur $]0, +\infty[$, il est de même pour la fonction g.

2. Sur l'intervalle $]1, +\infty[$, on a $g(x) = \zeta(x) - \dfrac{1}{x-1}$, par continuité de la fonction g en 1, on a :

$$g(1) = \lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(\zeta(x) - \frac{1}{x-1}\right).$$

• • • • • • • • • • •