Devoir surveillé $n°5$
Correction

Exercice

1. On a $F'(x) = f(x)$ et $F(\frac{1}{2}) = 0$, une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} c_k(F) &= \int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} F(x)x^k \mathrm{d}x \\ &= \left[F(x)x^{\frac{k+1}{k+1}}\right]_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{k+1}\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)x^{k+1}\mathrm{d}x \\ &= \frac{F(\frac{1}{2})}{(k+1)2^{k+1}} - \frac{1}{k+1}c_{k+1}(f). \end{aligned}$$

Soi $P = \sum a_k X^k$ un polynôme à coefficients réels, alors on a :

$$\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)P(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} a_k \int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)x^k \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} a_k c_k(f).$$

2. (a) Soit $0 \leq h \leq \frac{1}{2}$ et $h \leq a \leq 1-h$. On a ϕ_h est paire et $\phi_h'(t) = \frac{-2t}{1-h^2}$, d'où le tableau de variation de ϕ_h.

x	0		1
$\phi'(x)$		$-$	
$\phi(x)$	$\frac{1}{1-h^2}$	↘	0

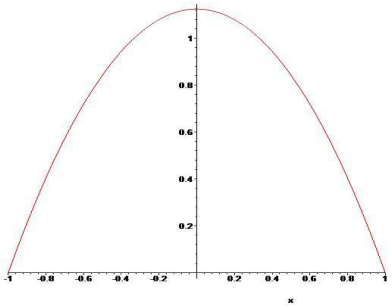

Tableau de variation et courbe de ϕ.

(b) Si $t \in]-h, h[$, $\phi_h(t) > 1$, donc $\lim\limits_{n\to\infty}[\phi_h(t)]^n = +\infty$.
Si $t \in]-1, -h[\cup]h, 1[$, $\phi_h(t) < 1$, donc $\lim\limits_{n\to\infty}[\phi_h(t)]^n = 0$.
Si $t = \pm h$, on a $\phi_h(t) = 1$, donc $\lim\limits_{n\to\infty}[\phi_h(t)]^n = 1$.
Nous avons

$$v_n(a) = \int_{a-1}^{-h}[\phi_n(t)]^n\mathrm{d}t + \int_{-h}^{-h}[\phi_n(t)]^n\mathrm{d}t + \int_{h}^{-a}[\phi_n(t)]^n\mathrm{d}t$$

Il existe $t_0 \in]a-1, h[$ tel que $\int_{a-1}^{-h}[\phi_n(t)]^n\mathrm{d}t = (1-a-h)[\phi_n(t_0)]^n$ et donc $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{a-1}^{-h}[\phi_n(t)]^n\mathrm{d}t = 0$
Il existe $t_1 \in]-h, h[$ tel que $\int_{-h}^{-h}[\phi_n(t)]^n\mathrm{d}t = 2h[\phi_n(t_1)]^n$ et donc $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-h}^{h}[\phi_n(t)]^n\mathrm{d}t = +\infty$
Il existe $t_2 \in]h, a[$ tel que $\int_{h}^{a}[\phi_n(t)]^n\mathrm{d}t = (a-h)[\phi_n(t_2)]^n$ et donc $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-h}^{h}[\phi_n(t)]^n\mathrm{d}t = +\infty$
En conclusion $\lim\limits_{n\to\infty} v_n(a) = +\infty$.

(c) La fonction $g : [a-1, a] \to \mathbb{R}$ est continue et vérifie $g(t) \geq m$ pour tout $t \in [a-1, a]$, donc

$$\int_{a-1}^{a} g(t)[\phi_n(t)]^n \mathrm{d}t =\geq m \int_{a-1}^{a} [\phi_n(t)]^n \mathrm{d}t = m v_n(a).$$

D'autre part, on sait que $\lim\limits_{n\to\infty} v_n(a) = +\infty$, donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $v_n(a) \geq 1$ et donc

$$\int_{a-1}^{a} g(t)[\phi_n(t)]^n \mathrm{d}t \geq m > 0$$

dès que $n \geq n_0$.

3. (a) f étant continue et $f(0) \neq 0$, donc il existe $0 < h \leq \dfrac{1}{2}$ tel que $\forall x \in [-h, h]$, $f(x) \neq 0$. On peut supposer $f(x) > 0$ pour tout $x \in [-h, h]$, donc f est minorée par un nombre strictement positif dans l'intervalle $[-h, h]$. Supposons que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\quad c_k(f) = 0$, donc par linéarité $\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)x^k \mathrm{d}x = 0$ pour tout polynôme P à coefficients réels, et comme $x \mapsto [\phi_h(x)]^n$ est une fonction polynomiale, alors $\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)[\phi_h(x)]^n \mathrm{d}x = 0$, mais ceci est en contradiction avec le résultat de la question 3. c) (avec $a = \dfrac{1}{2}$). Donc les $c_k(f)$ ne sont pas tous nuls.

Si $f(x_0) \neq 0$ pour $x_0 \in]\dfrac{-1}{2}, \dfrac{1}{2}[$, considérons $f_1(x) = f(x_0 - x)$, donc $f_1(x_0) \neq 0$. D'autre part,

$$\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)[\phi_h(x)]^n \mathrm{d}x = \int_{x_0-\frac{1}{2}}^{x_0+\frac{1}{2}} f(x_0 - t)[\phi_h(x_0 - t)]^n \mathrm{d}t \overset{x=x_0-t}{=} \int_{x_0+\frac{1}{2}-1}^{x_0+\frac{1}{2}} f_1(t)[\phi_h(x_0 - t)]^n \mathrm{d}t.$$

Le même raisonnement faite au debut de cette question montre que $\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)[\phi_h(x)]^n \mathrm{d}x > 0$ (avec $a = x + \dfrac{1}{2}$), ce qui est absurde.

(b) Il est clair que l'application $f \mapsto (c_k(f))_{k\in\mathbb{N}}$ est linéaire. Supposons que $c_k(f) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, si $f \neq 0$ alors il existe un $x_0 \in \left]\dfrac{-1}{2}, \dfrac{1}{2}\right[$ tel que $f(x_0) \neq 0$, donc d'après ce qui précède les $c_k(f)$ ne sont pas tous nuls ce qui est impossible, donc $f = 0$ sur $\left]\dfrac{-1}{2}, \dfrac{1}{2}\right[$ et grace à la continuité de f, f est nulle sur $\left[\dfrac{-1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$.

PROBLÈME : ÉQUATION DE GAUSS

Partie I : Quelques résultats préliminaires

1. (a) Pour tout $x \in]-1, 1[$, la fonction $\theta \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2\theta}}$ est continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, donc intégrable sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. De même , pour tout $x \in]0, +\infty[$, la fonction $\theta \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{\cos^2\theta + x^2 \sin^2\theta}}$ est continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, donc intégrable sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Donc F et G sont bien définies.

(b) Si $x \in]-1, 1[$ alors $\sqrt{1 - x^2} \in]0, 1[$, donc

$$F(\sqrt{1 - x^2}) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1 - (1 - x^2)\sin^2\theta}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1 - \sin^2\theta + x^2 \sin^2\theta}} = G(x).$$

2. (a) La fonction $\theta \mapsto \dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$ est continue sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et se prolonge par continuité par 0 en 0, donc cette fonction est intégrable sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

(b) On a $\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}$, d'où :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}\mathrm{d}\theta \\ &= -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}(\cos\frac{\theta}{2})}{\cos\frac{\theta}{2}} \\ &= -2[\ln(\cos\frac{\theta}{2})]_0^{\frac{\pi}{2}} = \ln 2. \end{aligned}$$

(c) Il est clair que h est continue sur $]0,+\infty[\times\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ comme rapport et composé de fonctions continues. De plus l'inégalité $0 < h(x,\theta) \leq \dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$, valable pour tout $(x,\theta) \in]0,+\infty[\times\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, montre que h est continue en $(0,0)$.

(d) En utilisant le changement de variable on obtient une nouvelle expression de G :

$$G(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\sin^2\theta + x^2\cos^2\theta}}.$$

On obtient donc la relation :

$$G(x) - K(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x,\theta)\mathrm{d}\theta.$$

Par théorème de continuité des fonctions définies par une intégral, l'application $x \mapsto \displaystyle\int_0^{\pi} h(x,\theta)\mathrm{d}\theta$ est continue sur $[0,+\infty[$, en particulier

$$\lim_{x\to 0}(G(x)-K(x)) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(0,\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}\mathrm{d}\theta = \frac{2}{\pi}I.$$

(e) Pour tout $x > 0$, on a :

$$K(x) \overset{t=\cos\theta}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2 + x^2(1-t^2)}} = \frac{2}{\pi s}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+\frac{1-x^2}{x}t^2}}.$$

- Si $x \in]0,1[$, on utilise le changement de variable $u = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}t$, donc :

$$\begin{aligned} K(x) &= \frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}\int_0^{\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}} \\ &= \frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}\left[\ln(u+\sqrt{1+u^2})\right]_0^{\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}} \\ &= \frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}\left(\ln(1+\sqrt{1-x^2}) - \ln x\right) \end{aligned}$$

- Si $x \in]1,+\infty[$, on utilise le changement de variable $u = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}t$, donc :

$$\begin{aligned} K(x) &= \frac{2}{\pi\sqrt{x^2-1}}\int_0^{\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} \\ &= \frac{2}{\pi\sqrt{x^2-1}}\left[\arcsin(u)\right]_0^{\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}} \\ &= yu \end{aligned}$$

- Si $x = 1$, $K(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \cos\theta \mathrm{d}\theta = \frac{2}{\pi}$.

Pour $x \in]0,1[$, on a

$$\begin{aligned} G(x) &= K(x) + \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x,\theta)\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}\ln(1+\sqrt{1-x^2}) - \frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}\ln x + \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x,\theta)\mathrm{d}\theta \\ &\underset{0^+}{\sim} -\frac{2}{\pi}\ln x + \frac{2}{\pi}2\ln 2 \end{aligned}$$

D'où $G(x) = -\dfrac{2}{\pi}\ln x + \dfrac{4}{\pi}\ln 2 + o_{0^+}(1)$.

(f) D'après la formule de la moyenne il existe $\theta_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $G(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos^2\theta + x^2\sin^2\theta}} = \dfrac{1}{\sqrt{\cos^2\theta_0 + x^2\sin^2\theta_0}}$, donc $\lim\limits_{x\to\infty} G(x) = 0$.

3. On sait que $\dfrac{1}{\sqrt{1-t}} = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}t^n$ pour $t \in]-1,1[$, donc pour $x \in]-1,1[$ et $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2\sin^2\theta}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n}\sin^{2n}\theta.$$

La dernière série converge uniformément en θ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ puisque $|\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n}\sin^{2n}\theta| \leq \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n}$ et la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n}$ converge. Donc on peut intégrer terme à terme cette série, d'où :

$$F(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-x^2\sin^2\theta}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n}\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\theta\mathrm{d}\theta = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(w_{2n})^2x^{2n}.$$

4.

x	1	$+\infty$
$\zeta'(x)$		$-$
$\zeta(x)$	$+\infty$	1

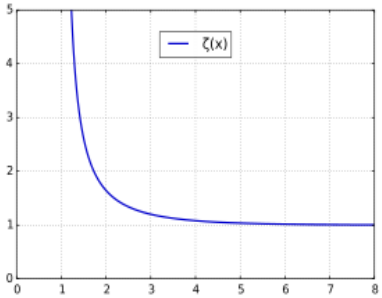

Tableau de variation et courbe de ζ.

5. Supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $F_1 = \alpha G_1$, donc $\forall x \in]0,1[$, $F_1(x) = \alpha G_1(x)$, en particulier $F_1(\frac{1}{2}) = \alpha G_2(\frac{1}{2}) = \alpha F_1(\frac{1}{2})$ (*la question 1. (b) de cette partie*), donc $\alpha = 1$. D'autre part, l'égalité $\lim\limits_{x\to 0^+} F_1(x) = \alpha \lim\limits_{x\to 0^+} G_1(x)$ entraîne $1 = \alpha\infty$ ce qui est absurde. Donc F_1 et G_1 ne sont pas proportionnelles

Partie II : Solutions de l'équation de Gauss

1. En dérivant et en remplaçant dans l'expression de $\mathscr{L}(f)$, on trouve :

$$\forall x \in]-R,R[,\ \ \mathscr{L}(f)(x) = -a_1 + \sum_{n=1}^{\infty}(n^2 a_{n-1} - (n+1)^2 a_{n+1})x^n.$$

Donc $b_0 = -a_1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = n^2 a_{n-1} - (n+1)^2 a_{n+1}$.

2. Supposons que $(\mathscr{S})$ admet une solution développable en série entière au voisinage de 0, notée f. Posons $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ pour $x \in]-R,R[$ où $R > 0$ désigne le rayon de convergence de cette série. D'après ce qui précède f est solution de $(\mathscr{S})$ si, et seulement si, $a_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2 a_{n-1}$, donc $a_{2p+1} = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et

$$a_{2p} = \left(\frac{2p-1}{2p}\right)^2 a_{2(p-1)} = \left(\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\right)^2 a_0.$$

Donc $f(x) = \left(1 + \sum\limits_{p=0}^{\infty} w_{2p}^2 x^{2p}\right) a_0 = a_0 F(x)$ et $R = 1$.

3. La fonction g vérifie $(x^3 - x)g''(x) + (3x^2 - 1)g'(x) + xg(x) = 0$ pour tout $x \in]0,1[$, donc g est $]0,1[$-solution de $(\mathscr{S})$.

4. L'ensemble de solutions de $(\mathscr{S})$ est un espace vectoriel de dimension 2.
Sur $]0,1[$, F_1 et G_1 sont deux solutions de $(\mathscr{S})$ qui sont linéairement indépendantes, donc elles engendrent l'espace de solutions.
Sur $]-1,0[$ F est solution de $(\mathscr{S})$, on note F_2 la restriction de cette fonction sur $]-1,0[$. Posons $G_2(x) = G_1(-x)$ pour $x \in]-1,0[$. Les deux fonctions sont deux solutions linéairement indépendantes de $(\mathscr{S})$ sur $]-1,0[$.
Sur $]-1,1[$ F et G sont deux solutions linéairement indépendantes de $(\mathscr{S})$.

5. On trouve $A(t) = -t^4 + t^2$ et $B(t) = -t^3 - t$.

6. Pour $t \in J$, on a :

$$(t^2 - t^4)g''(t) - (t^3 + t)g'(t) + g(t) = -t^2[(t^3 - t)f''(t) + (3t^2 - 1)f'(t) + tf(t)].$$

Donc si f est J-solution de $(\mathscr{S})$, alors g est J-solution de $(\mathscr{E})$.

7. Si $I =]0,1[$, alors $J =]1,+\infty[$. Si f est J-solution, alors $t \mapsto tf(t)$ est I-solution, donc $tf(t) = F(t)$ puis $F(t) = \dfrac{1}{t}f(t)$. Donc les $]1,+\infty[$-solutions de $(\mathscr{S})$ sont des combinaisons des fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{t}F_1(t)$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t}G_1(t)$.
De même les $]-\infty,-1[$-solutions de $(\mathscr{S})$ sont des combinaisons des fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{t}F_2(t)$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t}G_2(t)$.

•••••••••