Devoir surveillé $n°6$
Correction

Exercice

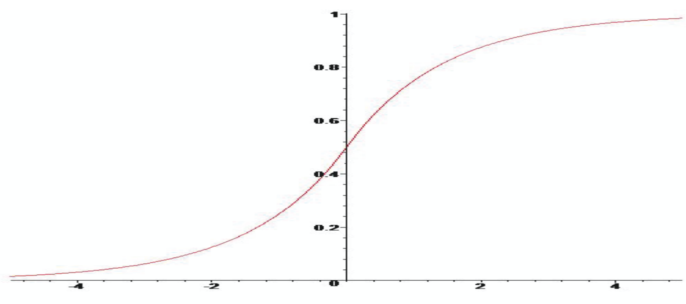
1. Il est evident que f est continue sur $\mathbb{R}$, puisque $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \alpha = f(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. Pour que f soit positive sur $\mathbb{R}$, α doit être positif.

D'autre part, f étant paire, donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x = 2\left[\frac{\alpha e^{x\ln 2}}{\ln 2}\right]_{-\infty}^{0} = \frac{2\alpha}{\ln 2}$. Donc f est une densité de probabilité si, et seulement si, $\alpha = \dfrac{\ln 2}{2}$.

2. (a) La fonction $x \mapsto xf(x)$ étant continue sur $\mathbb{R}$ et on a $xf(x) \sim o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$, donc $E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ existe et comme $x \mapsto xf(x)$ est impaire, alors $E(X) = 0$.
La fonction de répartition la variable aléatoire X est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t.$$

- Si $x \leq 0$, $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}e^{x\ln 2} = 2^{x-1}$.
- Si $x \geq 0$, $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \frac{\ln 2}{2}\left(\int_{-\infty}^{0} 2^t\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} 2^{-t}\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-x\ln 2} = 1 - 2^{-x-1}$.



(b)
- Pour $x < 1$, $p(X < x, X \geq -1) = 0$.
- Pour $x \geq 1$, $p(X < x, X \geq -1) = \dfrac{p(-1 \leq X \leq x)}{1 - p(X < -1)} = \dfrac{F(x) - F(-1)}{1 - f(-1)}$.

  Il faut distinguer deux cas :

  Si $1 \leq x \leq 0$, $p(X < x/X \geq -1) = \dfrac{2^{x+1} - 1}{3}$.

  Si $x \geq 0$, $p(X < x/X \geq -1) = \dfrac{3 - 2^{-x+1}}{3}$.

3. On a $Y = 2^{\frac{X}{2}}$, alors si $x \leq 0$, $G(x) = 0$.
Pour $x > 0$,

$$G(x) = p(Y \leq x) = p\left(2^{\frac{X}{2}} \leq x\right) = p\left(X \leq \frac{2\ln x}{\ln 2}\right) = F\left(\frac{2\ln x}{\ln 2}\right).$$

Lorsque $x > 0$ il faut distinguer deux cas suivant le signe de $\ln x$:

Si $0 < x \leq 1$, $G(x) = 2^{\frac{2\ln x}{\ln 2} - 1} = \dfrac{x^2}{2}$,

Si $x \geq 1$, $G(x) = 1 - 2^{-\frac{2\ln x}{\ln 2} - 1} = 1 - \dfrac{1}{2x^2}$.

Problème I

PREMIÈRE PARTIE

1. Notons B l'événement " tirer une boule blanche ". On a $p(B) = \dfrac{\mathtt{C}_5^2}{\mathtt{C}_5^2} = \dfrac{10}{21}$

2. (a) Il est clair que G prend ses valeurs dans l'ensemble $\{x, -10x, y, -3\}$.

On a $p(G = x) = p(B) = \dfrac{10}{21}$ et $p(G = -10x) = p(N) = \dfrac{\mathtt{C}_2^2}{\mathtt{C}_5^2} = \dfrac{1}{21}$ où on a noté N l'événement " tirer une boule noire ".
Notons B_1N_1 l'événement " tirer une boule blanche et une boule noire dans le premier tirage " et B_2 l'événement " tirer deux boules blanches au deuxième tirage ". Alors $(G = y) = B_1N_1 \cap B_2$, d'où :

$$p(G = y) = p(B_1N_1 \cap B_2) = p(B_2/B_1N_1) \times p(B_2) = \frac{\mathtt{C}_5^1\mathtt{C}_2^1}{\mathtt{C}_7^2} \times \frac{\mathtt{C}_4^2}{\mathtt{C}_5^2} = \frac{2}{7}.$$

Notons B_2N_2 l'événement " tirer une boule blanche et une boule noire dans le deuxième tirage ". Donc $(G = -3) = B_1N_1 \cap B_2N_2$ et donc

$$p(G = y) = p(B_1N_1 \cap B_2N_2) = p(B_2N_2/B_1N_1) \times p(B_2N_2) = \frac{\mathtt{C}_5^1\mathtt{C}_2^1}{\mathtt{C}_7^2} \times \frac{\mathtt{C}_4^1\mathtt{C}_2^1}{\mathtt{C}_5^2} = \frac{4}{21}.$$

D'où la loi de G.

x_i	x	$-10x$	y	-3
$p(G = x_i)$	$\frac{10}{21}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{6}{21}$	$\frac{4}{21}$

(b) Déterminons l'espérance de G :

$$E(G) = xp(G = x) + (-10x)p(G = -10) + yp(G = y) + (-3)p(G = -3) = \frac{1}{7}(2y - 4).$$

Pour que le jeu soit équitable il faut et suffit que $E(G) = 0$, c'est-à-dire $y = 2$.

(c) On a, pour $y = 2$, $\sigma(G) = \sqrt{E(G^2) - E(G)^2} = \sqrt{E(G^2)}$. Calculons donc $E(G^2)$. D'après le théorème de transfert, on a :

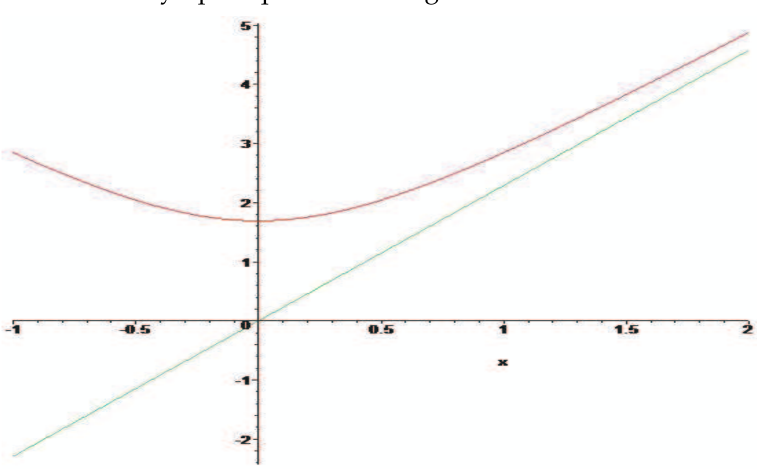
$$E(G^2) = x^2p(G = x) + (-10x)^2p(G = -10) + 4p(G = y) + 9p(G = -3) = \frac{110x^2 + 60}{21}.$$

D'où $\sigma(G) = \sqrt{\dfrac{110x^2 + 60}{21}}$.

Deuxième partie

1. On vérifie facilement que $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) = \sqrt{\dfrac{110}{21}}x \right) = 0$, il suffit donc de prendre $\alpha = \sqrt{\dfrac{110}{21}}$. De plus $f(x) \geq \alpha x$ pour tout $x \geq 0$.

2. Il est clair que f est une fonction paire, croissante et tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. La question précédente montre que la droite $y = \alpha x$ est une direction asymptotique au voisinage de $+\infty$ et par parité, la droite $y = -\alpha x$ est une direction asymptotique au voisinage de $-\infty$.



3. On a $7 \leq \sigma(G) \leq 8$ si, et seulement si, $8,80 \leq x^2 \leq 11,67$. Donc l'unique x vérifiant l'inégalité précédente est $x = 3$.

Problème II

I- DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE ENTIÈRE DE LA FONCTION TANGENTE

1. (a) On a pour tout x dans I, $g'(x) = 1 + g^2(x)$. Soit n un entier tel que $n > 1$. On a $g^{(n+1)}(x) = (g^2)^{(n)}$ et en appliquant la formule de Leibniz

$$g^{(n+1)}(x) = \sum_{n}^{k=0} \complement_n^k g^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

(b) Pour tout réel x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $g(x) \geq 0$ et $g'(x) \geq 0$. Si on suppose que pour tout $k \leq n$ et pour tout x dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $g^{(k)}(x) \geq 0$ alors la formule précédente montre que $g^{(n+1)}(x) \geq 0$.

Ainsi par récurrence pour tout entier n et pour tout réel x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $g^{(n)}(x) \geq 0$.

2. Comme g est $\mathscr{C}^\infty$ sur I, $g(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n g^{(n+1)}(t) \mathrm{d}t$ d'après la formule de Taylor avec reste intégral. En faisant le changement de variable $t = xu$, on trouve :

$$g(x) = S_n(x) + \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n g^{(n+1)}(xu) \mathrm{d}u.$$

3. (a) Soit $0 \leq x < y < \frac{\pi}{2}$. On a

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n g^{(n+1)}(xu) \mathrm{d}u.$$

Or $g^{(n+1)}$ est positive sur I et $g^{(n+2)}$ est positive sur I, $g^{(n+1)}$ est croissante sur I et donc pour tout u dans $[0, 1]$, $0 \leq (1-u)^n g^{(n+1)}(xu) \leq (1-u)^n g^{(n+1)}(yu)$ ce qui donne en intégrant pour u entre 0 et 1,

$$0 \leq R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n g^{(n+1)}(yu) \mathrm{d}u$$

et donc

$$0 \leq R_n(x) = \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} R_n(y).$$

(b) D'autre part si y est dans I, $S_n(y) \geq 0$ comme somme de termes positifs. On en déduit que $R_n(y) \leq g(y)$ et donc

$$0 \leq R_n(x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} g(y).$$

4. Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Alors on fixe y tel que $x < y < \frac{\pi}{2}$. D'après la question précédente, on a $\lim\limits_{n \to +8} R_n(x) = 0$, donc $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Comme g est impaire, pour tout p, $a_{2p} = \dfrac{g^{(2p)}(0)}{(2p)!} = 0$ et $x \mapsto a_n x^n$ est une fonction impaire. Donc la relation précédente se généralise à I.

5. La série $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ converge si $|x| < \frac{\pi}{2}$. Donc son rayon R_a vérifie $R_a \geq \frac{\pi}{2}$. Si $R_a > \frac{\pi}{2}$, sa somme S est continue sur $]-R_a, R_a[$ donc en $\frac{\pi}{2}$. Comme pour tout x dans I, $S(x) = \tan(x)$. On en déduit que g aurait une limite finie à gauche en $\frac{\pi}{2}$ ce qui est faut. Donc $R_a = \frac{\pi}{2}$

II- DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE ENTIÈRE DE LA FONCTION f

1. Puisque $e^z = 1$ si, et seulement si, $z \in 2\pi i\mathbb{Z}$ on a $D_f = \mathbb{C}\backslash 2\pi i\mathbb{Z}$. f est continue sur D_f puisque $z \mapsto e^z$ est continue sur $\mathbb{C}$ et $\forall z \in D_f$, $f(z) = \dfrac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}} = \dfrac{1}{h(z)}$ où h est la somme d'une série entière qui converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ donc de rayon de convergence $+\infty$. En particulier, h est continue sur $\mathbb{C}$ et $h(0) = 1$ donc $\lim\limits_{z\to 0} h(z) = 1$ et donc f se prolonge par continuité en 0.

2. (a) Avec la notation introduite au 1., on a $\forall z \in D_f$, $f(z)h(z) = 1$ soit, par produit de Cauchy, pour tout z tel que $|z| < r'$,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{(n-k+1)!}\right) z^n$$

ce qui donne $b_0 = 1$ et, pour $n \geq 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{(n-k+1)!} = 0$ ou encore $b_n = -\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{(n-k+1)!}$.

(b) La relation ci-dessus donne immédiatement $b_1 = -\dfrac{1}{2}$, $b_2 = \dfrac{1}{12}$, $b_3 = 0$.

(c) Montrons par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|b_n| \leq 1$. Le résultat est vrai pour $n = 0$ et si il est vrai jusqu'à $n-1$ ($n \geq 1$), on a

$$|b_n| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|b_k|}{(n-k+1)!} \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n-k+1)!} = \sum_{p=2}^{n+1} \frac{1}{p!} \leq \sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{p!} = e - 2 \leq 1.$$

(d) Donc $\forall z \in \mathbb{C}$, $|b_n z^n \leq |z^n|$ et la série majorante converge pour $|z| < 1$, donc $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ converge pour $|z| < 1$ et donc $R \geq 1$.

3. Posons $S(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. S est définie sur D_R et on a, par le calcul fait au (a), $\forall z \in D_R$, $S(z)h(z) = 1$. Ceci montre que h ne s'annule pas sur D_R, donc $D_R \subset D_f$ et qu'on a donc $\forall z \in D_R$, $S(z) = \dfrac{1}{h(z)} = f(z)$. Donc f est developable en série entière sur D_R.

4. On a

$$1 + \frac{f(4z) - f(2z)}{z} = 1 + \frac{4}{e^{4z} - 1} - \frac{2}{e^{2z} - 1} = \frac{e^{4z} - 1 + 4 - 2(e^{2z} + 1)}{e^{4z} - 1}.$$

Donc

$$1 + \frac{f(4z) - f(2z)}{z} = \frac{(e^{2z} - 1)^2}{e^{4z} - 1} = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1}.$$

5. Pour tout x dans I, $\tan(x) = \dfrac{1}{i}\dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}}$ donc $\tan(x) = \dfrac{1}{i}\dfrac{e^{2ix} - 1}{e^{2ix} + 1}$. Donc si $|x| < \dfrac{R}{4}$ et est non nul, on a $\tan(x) = \dfrac{1}{i}\left(1 + \dfrac{1}{ix}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(4^n - 2^n)B_n i^n x^n\right)$. Pour de tels x, $\tan(x) = \dfrac{1}{i}\left(1 + \dfrac{1}{i}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(4^{n+1} - 2^{n+1})B_{n+1} i^{n+1} x^n\right)$.
Comme $B_1 = -\dfrac{1}{2}$, on a

$$\tan(x) = -\sum_{n=1}^{\infty}(4^{n+1} - 2^{n+1})B_{n+1} i^{n+1} x^n$$

relation encore vraie si $x = 0$.
Par égalité de deux séries entières, on a donc pour $n \geq 1$, $a_n = (4^{n+1} - 2^{n+1})B_{n+1} i^{n+1}$.
Comme $a_{2n} = 0$, il en résulte que pour $n \geq 1$, $B_{2n+1} = 0$. Alors $R = \sup\{r \geq 0/(B_{2n} r^{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ bornèe$\}$. Or $|B_{2n} r^{2n}| \sim \dfrac{a^{2n-1}}{4^{2n}} r^{2n}$. Comme $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{2n+1} r^{2n+1}$ est de rayon $\dfrac{\pi}{2}$, $(B_{2n} r^{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si $\dfrac{r}{4} < \dfrac{\pi}{2}$ et non bornée si $\dfrac{r}{4} > \dfrac{\pi}{2}$ donc $R = 2\pi$.

III- LES POLYNÔMES DE BERNOULLI

1. L'application $z \mapsto e^{zt}$ est développable en série entière sur $\mathbb{C}$, $z \mapsto f(z)$ est développable en série entière sur D_R donc $z \mapsto F(z,t)$ est développable en série entière sur D_R.
On a $\forall (z,t) \in D_R \times \mathbb{R}$,

$$F(z,t) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{B_{n-k}}{(n-k)!k!} t^k\right) z^n.$$

On a donc $\forall (z,t) \in D_R \times \mathbb{R}$,

$$F(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(t)}{n!} z^n$$

avec

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \complement_n^k B_{n-k} t^k.$$

2. Puisqu'on connaît b_k pour k compris entre 1 et 3, on trouve :

$$P_0(t) = 1, \;\; P_1(t) = t - \frac{1}{2}, \;\; P_2(t) = t^2 - t + \frac{1}{6}, \;\; P_3(t) = t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2}t.$$

3. On a $\forall z \in D_R$, $F(z,0) = f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(0)}{n!} z^n$ donc, par unicité du développement en série entière, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n(0) = B_n$.

4. $\forall (z,t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$, $F(z,t+1) - F(z,t) = e^{z(t+1)} f(z) - e^{zt} f(z) = e^{zt}(e^z - 1) f(z) = e^{zt} z$. Donc $\forall (z,t) \in D_R \times \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(t+1) - P_n(t)}{n!} z^n = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} z^n.$$

Donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $P_0(t+1) - P_0(t) = 0$ et, pour $n \geq 1$, $P_n(t+1) - P_n(t) = nt^{n-1}$.

5. On a $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $k^p = \dfrac{1}{p+1}(P_{n+1}(k+1) - P_{n+1}(k)$, donc $S_p = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{P_{n+1}(n+1) - Pn+1(1)}{p+1}$.

6. $\forall (z,t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$, $F(-z, 1-t) = e^{-z(1-t)} f(-z) = e^{-z} e^{zt} \dfrac{-z}{e^{-z} - 1} = e^{zt} \dfrac{-z}{1 - e^z} = F(z,t)$. Donc $\forall (z,t) \in D_R \times R$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(1-t)}{n!} (-1)^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(t)}{n!} z^n$ donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $P_n(1-t) = (-1)^n P_n(t)$.

7. (a) Soit t un réel et r tel que $0 < r < R$. On a

$$F(t, re^{i\theta}) e^{-in\theta} = \sum_{p=0}^{\infty} P_p(t) \frac{r^p e^{i(p-n)\theta}}{p!} = \sum_{p=0}^{\infty} h_p(\theta)$$

avec $h_p(\theta) = P_p(t) \dfrac{r^p e^{i(p-n)\theta}}{p!}$. Pour tout θ de $[0, 2\pi]$, $|h_p(\theta)| \leq \frac{|P_p(t) r^p|}{p!}$. On a donc $\|h_p\|_\infty^{[0,2\pi]} \leq \dfrac{|P_p(t) r^p|}{p!}$.
Or $\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{N}} \frac{|P_p(t) r^p|}{p!}$ converge car $\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{N}} \frac{P_p(t) z^p}{p!}$ est une série entière de rayon au moins égal à R et que $r < R$.

Par conséquent $\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{N}} h_p$ est une série de fonctions qui converge normalement donc uniformément sur $[0, 2\pi]$.
On a donc

$$\int_0^{2\pi} F(t, re^{i\theta}) e^{-in\theta} \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \sum_{p=0}^{\infty} h_p(\theta) \mathrm{d}\theta = \sum_{p=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} h_p(\theta) \mathrm{d}\theta = \sum_{p=0}^{\infty} P_p(t) \frac{r^p}{p!} \int_0^{2\pi} e^{i(p-n)\theta} \mathrm{d}\theta.$$

Or si $p \neq n$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{i(p-n)\theta} \mathrm{d}\theta = 0$ et si $p = n$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{i(p-n)\theta} \mathrm{d}\theta = 2\pi$.
On a donc finalement

$$\int_0^{2\pi} F(t, re^{i\theta}) e^{-in\theta} \mathrm{d}\theta = 2\pi r^n \frac{P_n(t)}{n!}.$$

(b) On considère r fixé dans $]0, R[$ et $n > 0$. Notons g la fonction définie sur $\mathbb{R} \times [0, 2\pi]$ par :

$$g(t, \theta) = F(t, re^{i\theta})e^{-in\theta} = e^{tre^{i\theta}} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}.$$

- Pour tout t dans $\mathbb{R}$, $\theta \mapsto g(t, \theta)$ est continue et intégrable sur $[0, 2\pi]$.
- $\dfrac{\partial g}{\partial t}$ existe sur $\mathbb{R} \times [0, 2\pi]$ et pour tout t, pour tout θ dans $[0, 2\pi]$, $\dfrac{\partial g}{\partial t}(t, \theta) = rF(t, re^{i\theta})e^{-i(n-1)\theta}$.

Pour tout θ dans $[0, 2\pi]$, $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial t}(t, \theta)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Pour tout t dans $\mathbb{R}$, $\theta \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial t}(t, \theta)$ est continue sur $[0, 2\pi]$.

- De plus, $\forall a > 0$, $\forall (t, \theta)$ dans $[-a, a] \times [0, 2\pi]$:

$$\left| \frac{\partial g}{\partial t}(t, \theta) \right| \leq re^{tr\cos\theta} |f(re^{i\theta})| \leq re^{ar} |f(re^{i\theta})|.$$

Or $\theta \mapsto re^{ar}|f(re^{i\theta})|$ est continue sur $[0, 2\pi]$ donc intégrable sur cet intervalle.

On en déduit que $\theta \mapsto \displaystyle\int_0^{2\pi} F(t, re^{i\theta})e^{-in\theta} \mathrm{d}\theta$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est la fonction $\theta \mapsto r\displaystyle\int_0^{2\pi} F(t, re^{i\theta})e^{-i(n-1)\theta} \mathrm{d}\theta$, c'est-à-dire d'après le (a) $t \mapsto 2\pi r^n \dfrac{P_{n-1}(t)}{(n-1)!}$. Mais c'est aussi la dérivée de la fonction $t \mapsto 2\pi r^n \dfrac{P_n(t)}{n!}$ qui vaut $t \mapsto 2\pi r^n \dfrac{P_n'(t)}{n!}$. En égalant les deux expressions, on trouve

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \ P_n'(t) = nP_{n-1}(t).$$

• • • • • • • • • • •