Devoir libre $n°1$
à rendre le 28/09/2015

Exercice 1

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. Pour tout $x \in \mathbb{Z}$ on note $\overline{x}$ sa classe modulo 2^n. Soit U_n le groupe des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/_{2^n\mathbb{Z}}$. Montrer que

1. $\operatorname{card} U_n = 2^{n-1}$.
2. $5^{2^{n-3}} \equiv 2^{n-1} + 1 \pmod{2^n}$.
3. $\overline{5}$ est d'ordre 2^{n-2} dans U_n.
4. $\overline{x} \in U_n$ implique $\overline{x} = \overline{5}^k$ ou $\overline{x} = -\overline{5}^k$ avec $0 \leq k < 2^{n-2}$.
5. U_n n'est pas cyclique.

Exercice 2

Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif et H l'ensemble des matrices de la forme

$$M(w,x,y,z) = \begin{pmatrix} w & -x & -y & -z \\ x & w & -z & y \\ y & z & w & -x \\ z & -y & x & w \end{pmatrix}$$

où (w,x,y,z) parcourt $\mathbb{K}^4$.

1. Montrer que H est une sous-algèbre de l'algèbre $\mathscr{M}_4(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre 4 à coefficients dans $\mathbb{K}$ contenant la matrice unité. La multiplication est -elle commutative dans H ?
2. Chercher les éléments de H inversibles dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{K})$ et calculer leurs inverses. Déduire l'ensemble des éléments inversibles de H.
3. H est-il un corps lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$?

Exercice 3

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que l'on définit une norme sur E en posant

$$N(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)| \mathrm{d}t.$$

2. Montrer que pour toute fonction f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ et pour tout $x \in [0,1]$, $|f(x)| \leq N(f)$. En déduire que $\|f\|_\infty \leq N(f)$.
   Quelle(s) conséquence(s) peut-on en tirer parmi les énoncés suivants :
   — toute suite de E qui converge pour N converge pour $\|.\|_\infty$,
   — toute suite de E qui converge pour $\|.\|_\infty$ converge pour N ?
   Justifier votre réponse.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n(x) = \cos(n\pi x)$. Montrer l'égalité des deux intégrales qui suivent avant de les calculer :

$$\int_0^1 |g_n(t)| \mathrm{d}t = \int_0^{n\pi} |\cos(u)| \frac{\mathrm{d}u}{n\pi}.$$

(b) On pose $f_n(t) = \dfrac{\sin(n\pi t)}{n}$. Étudier la convergence de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ pour chacune des deux normes $\|.\|_\infty$ et N.

(c) Ces deux normes sont-elles équivalentes ?

• • • • • • • • • • •