Devoir libre $n°2$
à rendre le 19/10/2015

Exercice 1

Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$. Pour tout élément $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ de E, on pose $\|P\| = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$.

1. Montrer que l'application $P \longmapsto \|P\|$ de E dans $\mathbb{R}$ est une norme sur E.
2. Soit $B = \{P \in E / \|P\| \leq 1\}$ la boule unité de E. On considère la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \ P_n = X^n$. Démontrer qu'aucune suite extraite de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est convergente. Que peut-on conclure ?
3. On considère la suite de terme général $P_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} X^k$, $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy de B.
   (b) Étudier la convergence de $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Que peut-on conclure ?
4. Soient les deux applications :
$$f: \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$$
   et
$$g: \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & (X+1)P \end{array}$$
   (P' désigne le polynômes dérivé)
   (a) f et g sont-elles continues sur E ?
   (b) Étudier la continuité des restrictions f_n et g_n de f et g au sous-espace E_n de E constitué des polynômes de degré inférieure ou égal à n.

Exercice 2

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On pose, pour $P \in E$,
$$N_1(P) = \sup\{|P(x)|/x \in [0,1]\},\ N_2(P) = \sup\{|P(x)|/x \in [1,2]\}.$$
On définit enfin la forme linéaire $f : P \in E \longrightarrow P(0) \in \mathbb{R}$. On munit $\mathbb{R}$ de la valeur absolue.

1. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur E.
2. Montrer que f est une application linéaire continue sur (E, N_1) et calculer sa norme.
3. Montrer que f n'est pas continue sur (E, N_2) (considérer $P_n(t) = \left(1 - \frac{t}{2}\right)^n$).
4. Les normes N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?

5. Soit $O = \{P \in E / P(0) \neq 0\}$. Montrer que O est ouvert pour N_1 mais pas pour N_2 (considérer $1 - P_n$).

Exercice 3

En utilisant un résultat de réduction des endomorphismes en dimension 3, montrer que

$$SO_3(\mathbb{R}) = \{A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) / A\,{}^tA = I_3 \text{ et } \det(A) = 1\}$$

est une partie connexe par arcs de l'espace vectoriel normé ($\mathscr{M}_3(\mathbb{R}), \|.\|)$ où $\|(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3}\| = \max\limits_{i,j} |a_{ij}|$.

• • • • • • • • • • •