Devoir libre n°3
à rendre le 09/11/2015

Exercice 1 (La méthode des moindres carrés)

Étant donné une nuage de points $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq n}$, la droite des moindres carrés (ou droite de régression linéaire) est la droite d'équation $y = mx + p$ qui minimise la quantité

$$F(m, p) = \sum_{k=1}^n (y_k - mx_k - p)^2.$$

1. Démontrer que si (m, p) est un couple où ce minimum est atteint, alors (m, p) est solution du système

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n (y_k - mx_k - p) = 0, \\ \sum_{k=1}^n x_k (y_k - mx_k - p) = 0. \end{cases}$$

2. On note $\bar{x}$ et $\bar{y}$ les valeurs moyennes respectives de $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(y_i)_{1 \leq i \leq n}$. Démontrer que si la somme $\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 \neq 0$, alors il existe au plus une droite des moindres carrés, avec

$$m = \frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y})}{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}.$$

3. On veut désormais prouver l'existence d'une droite des moindres carrés, toujours sous la condition

$$\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 \neq 0.$$

- (a) Pourquoi suffit-il de prouver que $\lim_{\|(m,p)\| \rightarrow +\infty} F(m, p) = +\infty$?

- (b) Démontrer que

$$F(m, p) = \sum_{k=1}^n u_i^2(m, p) + v(m, p) + c,$$

où $u_1, \dots, u_n, v$ sont des formes linéaires sur $\mathbb{R}^2$ et $c \in \mathbb{R}$.

- (c) Démontrer que le rang de $(u_1, \dots, u_n)$ est 2.

- (d) On suppose que (u_1, u_2) sont indépendantes. Justifier que l'on peut écrire

$$F(m, p) = u_1^2(m, p) + au_1(m, p) + u_2^2(m, p) + bu_2(m, p) + c + R(m, p),$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $R(m, p) \geq 0$.

- (e) Justifier que $\lim_{\|(m,p)\| \rightarrow +\infty} |u_1(m, p)| + |u_2(m, p)| = +\infty$.