MP – CPGE Khouribga

Année scolaire 15/16

Devoir libre $n^\circ 4$

À rendre le : 25/11/2015

Problème

On note n un entier supérieur ou égal à 1 et V_n l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ formé des applications de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$ qui sont périodiques de période n, c'est-à-dire que $\forall f \in V_n,\quad f(a+n) = f(a)$ pour tout a dans $\mathbb{Z}$.

Les opérations vectorielles de V_n sont définies de la manière usuelle

$$(f+g)(a) = f(a) + g(a), \quad (\lambda f)(a) = \lambda f(a)$$

pour f, g dans V_n, a dans $\mathbb{Z}$ et λ dans $\mathbb{C}$.

1. On considère, pour $k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, les applications $f_k : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ définies par :

$$f_k(a) = \begin{cases} 1, & si \;\; a \equiv k[n] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

1*a*. Montrer que $(f_0, f_1, \ldots, f_{n-1})$ est une base $\mathscr{B}$ de V_n.

1*b*. En déduire un isomorphisme u de V_n sur $\mathbb{C}^n$.

2. **2*a*.** Déterminer l'ensemble U des nombres complexes r tels que les applications $e_r : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ définies par $e_r(a) = r^a$, appartient à V_n.

2*b*. Montrer que la famille $(e_r)_{r\in U}$ est une base de V_n qu'on note (e_U).

3. Soit φ l'endomorphisme de V_n défini par :

$$(\varphi(f))(a) = f(a+1), \quad f \in V_n \;\text{ et }\; \mathrm{a} \in \mathbb{Z}.$$

3*a*. Montrer que toute valeur propre de φ est une racine n-ième de l'unité.

3*b*. Établir la réciproque de **3a**. et en déduire que toute fonction f de V_n s'écrit de manière unique sous la forme

$$(*) \quad f(a) = \sum_{r\in U} \lambda_r r^a, \quad \lambda_r \in \mathbb{C}.$$

3*c*. φ est-il diagonalisable ?

4. **4*a*.** Calculer la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$ du **1a**.

4*b*. Calculer le polynôme caractéristique de φ et retrouver ainsi le résultat de la question **3c**.

5. Montrer que toute application linéaire ψ de V_n dans V_n qui commute avec φ est combinaison linéaire de $Id, \varphi, \ldots, \varphi^{n-1}$ à coefficients complexes. Id désigne l'endomorphisme identique de V_n.

Fin de problème