

DEVOIR LIBRE n°5

À rendre le : 04/01/2016

PROBLÈME

PREMIÈRE PARTIE : THÉORÈME DE PROJECTION SUR UN CONVEXE FERMÉ

Dans cette question, nous démontrons le théorème de projection sur un convexe fermé et non vide. Soient C un convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$. On pose

$$d_C(x) = d(x, C) = \inf_{y \in C} \|x - y\|,$$

où $\|\cdot\|$ est une norme quelconque associée à un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ sur $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer l'égalité du parallélogramme : pour tous u et v dans $\mathbb{R}^n$, on a

$$\left\| \frac{u+v}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{u-v}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2} (\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

2. Montrer que pour tous y et y' dans C , on a

$$\left\| \frac{y-y'}{2} \right\|^2 \leq \frac{1}{2} (\|y-x\|^2 + \|y'-x\|^2) - d_C(x)^2.$$

3. Montrer qu'il existe au plus un point qui réalise la distance $d_C(x)$.
4. Soit une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de C telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - x\| = d_C(x).$$

Montrer que la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy. Conclure sur l'existence et l'unicité de la projection de x sur C .

DEUXIÈME PARTIE : PROPRIÉTÉS

Dans la suite on note, pour $x \in \mathbb{R}^n$, $p(x)$ l'unique élément réalisant $d_C(x) = \|x - p(x)\|$.

1. Montrer que $\forall (a, x) \in C \times \mathbb{R}^n$, on a :

$$(x - p(x)|a - p(x)) \leq 0.$$

2. Montrer que p est 1-lipschitzienne sur E .
3. Montrer que $\forall (x, x_0) \in (\mathbb{R}^n \setminus C)^2$, on a les inégalités suivantes :
i. $2(x - p(x)|p(x_0) - p(x)) \leq -\|p(x) - p(x_0)\|^2$.
ii. $-\|p(x) - p(x_0)\|^2 - 2(x_0 - x|p(x_0) - p(x)) \leq 2(x - p(x_0)|p(x_0) - p(x))$.

TROISIÈME PARTIE : DIFFÉRENTIABILITÉ DE L'APPLICATION DISTANCE

Dans la suite on pose $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus C$ et on définit l'application :

$$\begin{aligned} f : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto d(x, C) \end{aligned}$$

1. Montrer que f est 1-lipschitzienne sur Ω .

2. a) Pour tout $(x, x_0) \in \Omega^2$, on pose $\delta(x, x_0) = f(x) - f(x_0) - \frac{2}{B(x_0)}(x_0 - p(x_0)|x - x_0)$. Vérifier qu'on a :

$$\begin{aligned} \delta(x, x_0) &= \frac{1}{B(x)} \left(\|x - x_0\|^2 + 2(x - p(x_0)|p(x_0) - p(x)) + \|p(x) - p(x_0)\|^2 \right) \\ &\quad + 2(x - x_0|x_0 - p(x_0)) \left(\frac{1}{B(x)} - \frac{1}{B(x_0)} \right) \end{aligned}$$

où $B(x) = \|x - p(x)\| + \|x_0 - p(x_0)\|$.

b) En utilisant ce qui précède, montrer que

$$f(x) - f(x_0) - \frac{2}{B(x_0)}(x_0 - p(x_0)|x - x_0) = o(\|x - x_0\|).$$

En déduire que f est différentiable en x_0 et donner $\text{grad } f(x_0)$.

FIN DE PROBLÈME