

DEVOIR LIBRE n°6

À rendre le : 14/01/2016

PROBLÈME

RAPPEL : Par définition, une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels est appelée suite de Cauchy si et seulement si :

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) : (\forall p \in \mathbb{N}) (\forall n \geq n_0) \quad \text{on a} \quad : |u_{n+p} - u_n| \leq \varepsilon.$$

On rappelle aussi que toute suite de Cauchy de nombres réels est convergente et converge vers un nombre réel.

On admet que la somme de la série de terme général $\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$, $k \geq 1$ vaut $\frac{\pi^2}{12}$.

1. Soit $u_n(x) = f(n) \sin(nx)$ le terme général d'une suite trigonométrique où f est une fonction décroissante, positive et tendant vers 0 quand x tend vers l'infini.

1a. Posons $S_n(x) = \sum_{k=1}^n \sin(kx)$. Montrer que pour tout $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, on a :

$$\clubsuit |S_n(x)| \leq \frac{1}{\sin(\frac{x}{2})}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$$\clubsuit \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_n(x)| \leq \frac{2f(n+1)}{|\sin(\frac{x}{2})|}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}.$$

1b. En déduire que la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ converge simplement pour tout $x \in \mathbb{R}$ et qu'elle converge uniformément sur tout intervalle $I = [2k\pi + a, 2(k+1)\pi - a]$, $\forall 0 < a < \pi$.

2. Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$. On définit, pour tout $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, la fonction réelle y_n , de la variable réelle x , par :

$$y_n : x \mapsto y_n(x) = \sum_{k=1}^n f(k) \sin(kx).$$

2a. Déterminer des expressions $v_n(x)$ et $w_n(x)$ telles que :

$$(3) \quad y_n(x) = \frac{\pi - x}{2} + \frac{1}{2n+1} \left[v_n(x) + \int_{\pi}^x w_n(t) dt \right] \quad \text{où} \quad 0 < x < \pi.$$

2b. Soit α et β des réels tels que $0 < \alpha < \beta < \pi$. Déduire de (3) que la suite de terme général y_n converge uniformément sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ vers la fonction

$$y : x \mapsto y(x) = \frac{\pi - x}{2}.$$

3. **3a.** Montrer que pour tout x , tel que $-\pi < x < 0$ ou $0 < x < \pi$, la série de fonctions de terme général

$$z_n : x \mapsto z_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$$

est convergente et déterminer la valeur de sa somme en fonction de celle de x .

- 3b.** En déduire la limite, lorsque p tend vers l'infini, de la somme :

$$S_p = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + (-1)^p \frac{1}{2p+1}.$$

4. Établir la convergence de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt.$$

En justifiant soigneusement chaque étape du calcul, déterminer le terme général d'une série numérique convergente dont I est la somme.

Donner le réel auquel I est égal.

FIN DE PROBLÈME