

Soit λ un paramètre réel fixé. On considère la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f_0(x) = 1 \\ f_n(x) = \frac{x(x + \lambda n)^{n-1}}{n!} \text{ si } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

1. a. Montrer que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ est absolument convergente si $|\lambda| < \frac{1}{e}$ et qu'elle est divergente si $x \neq 0$ et si $|\lambda| > \frac{1}{e}$.
- b. Examiner le cas $|\lambda| = \frac{1}{e}$ (utiliser la formule de Stirling : $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$)

Désormais, dans tout ce qui suit on suppose que $|\lambda| \leq \frac{1}{e}$ et on note F_λ la fonction somme de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x).$$

2. a. Montrer que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur tout intervalle $I_a =]-a, a[$ où $a > 0$. En déduire que F_λ est continue sur $\mathbb{R}$.
- b. Pour $n \geq 1$, exprimer la dérivée f'_n en fonction de f_{n-1} . Déduire que F_λ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F'_\lambda(x) = F_\lambda(x + \lambda).$$

- c. Montrer que F_λ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
3. a. Établir la relation :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f_n(x + y) = \sum_{k=0}^n f_k(x) f_{n-k}(y).$$

(Indication : on pourra raisonner par récurrence, dériver par rapport à x et se servir de la relation entre f'_k et f_{k-1}).

- b. Montrer que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, F_\lambda(x + y) = F_\lambda(x) F_\lambda(y).$$

4. a. Déterminer toute les fonctions numériques f dérivables sur $\mathbb{R}$, non identiquement nulles, et vérifiant :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x + y) = f(x)f(y).$$

- b. En déduire qu'il existe une unique fonction φ définie sur l'intervalle $D = \left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right]$ vérifiant :

$$(\forall x \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in D) F_\lambda(x) = e^{\varphi(\lambda)x}.$$

- c. Montrer que :

$$(\forall \lambda \in D), \varphi(\lambda) > 0 \text{ et } \lambda = \frac{\ln(\varphi(\lambda))}{\varphi(\lambda)}.$$

Cette propriété est-elle suffisante pour déterminer $\varphi(\lambda)$?

- d. Montrer que $\varphi\left(\frac{1}{e}\right) = e$.

5. D désigne l'intervalle $\left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right]$ et φ est la fonction introduite à la question 4.b.

- a. Montrer que

$$\forall \lambda \in D, \varphi(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{(n+1)!} \lambda^n.$$

- b. Montrer que φ est une bijection de D sur $\Delta = \varphi(D)$ et préciser la fonction réciproque φ^{-1} .

• • • • •