Problème

Dans ce problème, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice M, relativement à la base $\mathcal{B}$, est donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} X & X & X \\ Y & Y & Y \\ Z & Z & Z \end{pmatrix}.$$

I . Première partie

Dans cette partie, X, Y, et Z désignent trois réels et on pose $S = X + Y + Z$.

1. Déterminer, suivant les valeurs des réels X, Y et Z, une base du noyau $\ker u$ de u et précisez la dimension de ce sous-espace vectoriel. La matrice M est - elle inversible ?
2. a. Calculer M^2.
   b. À quelle condition sur X, Y et Z la matrice M est-elle celle d'un projecteur ?
   c. Montrer que si $S = 0$, alors M admet 0 pour unique valeur propre.
   d. M est-elle diagonalisable si $S = 0$?
   (distinguer les cas $X = Y = Z = 0$ et $(X, Y, Z) \neq (0, 0, 0)$)
3. Dans cette question, on suppose que $S \neq 0$.
   a. Montrer que les vecteurs $f_1 = e_1 - e_2$, $f_2 = e_2 - e_3$, et $f_3 = Xe_1 + Ye_2 + Ze_3$ forment une base $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{R}^3$.
   b. Déterminer la matrice Δ de u dans la base $\mathcal{B}_1$.
   c. En déduire que M est diagonalisable, et que $\mathrm{Sp}(M) = \{0, S\}$.
   d. On considère la matrice $K_\alpha = M - \alpha I_3$, où α est un réel.
      i. En écrivant M sous la forme $M = P\Delta P^{-1}$, où P est une matrice à préciser, montrer qu'il existe une matrice diagonale Δ_α que l'on calculera, telle que $K_\alpha = P\Delta_\alpha P^{-1}$.
      ii. Pour quelles valeurs de X, Y et Z, la matrice K_α est-elle inversible ?
      iii. **Application :** On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
      En utilisant ce qui précède, montrer que A est diagonalisable, déterminer ses valeurs propres et dire si A est inversible.

II . Deuxième partie

Dans cette partie, X, Y et Z désignent trois variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ et suivant une même loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ de paramètres n et p.

1. Rappeler les expressions de la loi, l'espérance et la variance de X. Calculer la fonction génératrice, G_X, de X. Déterminer la fonction génératrice de $X + Y$. En déduire que $X + Y$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(2n, p)$. Quelle est la loi de la variable $S = X + Y + Z$?
2. Quelle est la probabilité que M soit une matrice inversible ?
3. Quelle est la probabilité que M soit la matrice d'un projecteur ?
4. Soit T la variable aléatoire désignant le nombre de valeurs propres de la matrice M. Vérifier que $T(\Omega) = \{1, 2\}$. Donner la loi, l'espérance et la variance de T. Quelle est la probabilité que M soit diagonalisable ?
5. On suppose que $p = \dfrac{1}{2}$.
   a. Quelle est la probabilité qu'au moins une des lignes de M soit égale à la somme des deux autres ?
   (on rappelle la formule $\sum\limits_{k=0}^{r} C_n^k C_m^{r-k} = C_{n+m}^r$, valable pour $(n, m, r) \in \mathbb{N}^3$ avec $r \leq n + m$)
   b. Quelle est la probabilité que toutes les valeurs propres de M soient des entiers pairs ?

Fin de l'épreuve