

On note E l'ensemble des fonctions f réelles définies, continues sur $[0, +\infty[$ et telles que, pour tout réel x strictement positif, l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt$$

converge absolument.

On vérifie que E est un espace vectoriel réel et qu'il contient les fonctions continues et bornées sur $[0, +\infty[$.

Pour tout élément f de E on note $L(f)$ la fonction définie, pour tout réel x strictement positif, par :

$$L(f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt.$$

On vérifie aussi que L est une application linéaire de E dans l'espace vectoriel des fonctions de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

On admet que la fonction $L(f)$ est indéfiniment dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour tout entier naturel k et tout réel x strictement positif, on a :

$$L(f)^{(k)}(x) = (-1)^k \int_0^{+\infty} t^k e^{-xt} f(t) dt.$$

L'objectif de ce problème est de montrer que l'application linéaire

$$L : f \mapsto L(f)$$

est injective, en utilisant un argument basé sur les probabilités.

On considère un réel strictement positif et une fonction f continue et bornée sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Ainsi f est un élément de E .

1. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes toutes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ suivant toutes la loi exponentielle de paramètre égal à $\frac{1}{x}$. Pour tout entier naturel n , on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

- a. Donner une densité de la variable aléatoire S_n .

- b. Donner une densité, qu'on notera φ_n , de la variable aléatoire $\frac{S_n}{n}$.
2. a. Soit α un réel strictement positif. Prouver l'égalité ;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p \left(\left| \frac{S_n}{n} - x \right| > \alpha \right) = 0.$$

- b. En utilisant la continuité de la fonction f en x , pour tout réel ε strictement positif, justifier l'existence d'un réel α strictement positif tel que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\left(\left| f \left(\frac{S_n}{n} \right) - f(x) \right| > \varepsilon \right) \subset \left(\left| \frac{S_n}{n} - x \right| > \alpha \right)$$

- c. Soit ε un réel strictement positif. Prouver l'égalité :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p \left(\left| f \left(\frac{S_n}{n} \right) - f(x) \right| > \varepsilon \right) = 0$$

3. On note M un majorant de $|f|$ sur $[0, +\infty[$.

- a. Soit ε un réel strictement positif. Pour tout entier naturel n , on note A_n l'événement :

$$A_n = \left(\left| f \left(\frac{S_n}{n} \right) - f(x) \right| \leq \varepsilon \right)$$

et 1_{A_n} son indicatrice. Justifier l'inégalité suivante entre variables aléatoires :

$$\left| f \left(\frac{S_n}{n} \right) - f(x) \right| \leq \varepsilon 1_{A_n} + 2M(1 - 1_{A_n}).$$

- b. En déduire l'égalité :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(f \left(\frac{S_n}{n} \right) \right) = f(x).$$

$\mathbb{E}(Y)$ désigne l'espérance mathématique d'une variable aléatoire Y .

4. a. Déduire des questions précédentes l'égalité :

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n-1)!x^n} \int_0^{+\infty} t^{n-1} f(t) e^{-\frac{nt}{x}} dt$$

puis l'égalité (FORMULE D'INVERSION DE LAPLACE) :

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n (-1)^{n-1}}{(n-1)! x^n} (L(f))^{(n-1)} \left(\frac{n}{x} \right).$$

- b. Montrer que si deux fonctions f et g continues et bornées sur l'intervalle $[0, +\infty[$ vérifiant $L(f) = L(g)$, alors f et g sont égales.
- c. Montrer, plus précisément, que si deux fonctions f et g continues et bornées sur l'intervalle $[0, +\infty[$ vérifiant $L(f)(x) = L(g)(x)$ seulement pour tout x dans $]a, +\infty[$ (où a est un réel positif ou nul), alors f et g sont égales.

• • • • •