Devoir libre $n°01$
à rendre le 21/09/2017

EXERCICE

Étudier la suite de terme général z^n, $n \in \mathbb{N}$. (Poser $z = |z|(\cos\theta + \sin\theta)$ et distinguer les deux cas : $|z| < 1$ et $|z| = 1$ avec $\theta \equiv 0[2\pi]$.)

PROBLÈME

Un sous groupe (additif) de $(\mathbb{R}, +)$ est un ensemble de nombres réels contenant 0 et stable pour l'addition et la symétrisation. C'est à dire qu'une partie G de $\mathbb{R}$ est un sous-groupe lorsque

$$\begin{aligned} 0 &\in G; \\ \forall (x,y) \in G^2 : x + y &\in G; \\ \forall x \in G : -x &\in G. \end{aligned}$$

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$. On dit que A est dense dans B lorsque pour tout b dans B et tout $\varepsilon > 0$

$$]b - \varepsilon, b + \varepsilon[\cap A \neq \varnothing.$$

Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$, on dira que G est discret lorsqu'il existe un réel α strictement positif tel que

$$G \cap]0, \alpha[= \varnothing.$$

L'objet de ce problème est d'étudier les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$. Dans toute la suite, G désigne un tel sous-groupe.

1. Formuler une proposition traduisant que G n'est pas discret. Montrer que si G n'est pas discret

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \ \forall \alpha > 0, \ \ G \cap [x, x + \alpha[\neq \varnothing.$$

2. Dans cette question, on suppose que G est discret. Il existe donc un réel α strictement positif tel que $G \cap]0, \alpha[$ soit vide. On suppose aussi que G contient un élément non nul.

- (a) Soit I un intervalle de longueur $\dfrac{\alpha}{2}$. Montrer que $G \cap I$ contient au plus un élément.
  Que peut-on en déduire pour l'intersection de G avec un intervalle quelconque de longueur finie ?
- (b) Montrer que $G \cap \mathbb{R}_+^*$ admet un plus petit élément que l'on notera m.
- (c) Montrer que $G = \{km, k \in \mathbb{Z}\}$. Un tel ensemble sera noté $m\mathbb{Z}$.

3. Soit x et y deux réels strictement positifs, on pose $X = x\mathbb{Z} = \{kx, k \in \mathbb{Z}\}$, $Y = y\mathbb{Z} = \{ky, k \in \mathbb{Z}\}$, $S = \{mx + ny, (m,n) \in \mathbb{Z}^2\}$.

- (a) Vérifier que X, Y et S sont des sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$. On dira que S est le sous-groupe engendré par x et y.
- (b) Montrer que S est discret si et seulement si $\dfrac{x}{y} \in \mathbb{Q}$

4. On suppose ici que $\dfrac{x}{y}$ est irrationnel, soit $A = \{kx, k \in \mathbb{Z}^*\}$, $B = \{ky, k \in \mathbb{Z}^*\}$.

- (a) Montrer que $A \cap B = \varnothing$.
- (b) Montrer que $\inf\{|a - b|, (a,b) \in A \times B\} = 0$.

5. En considérant un certain sous-groupe additif, montrer que $\{\cos n, n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

Fin de l'épreuve.