Devoir libre n°02
à rendre le 12/10/2017

On note $\mathcal{C}([0, 1])$, l'espace vectoriel des fonctions continues du segment $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^+$, on note φ_λ , l'élément de $\mathcal{C}([0, 1])$ défini par

$$\forall x \in [0, 1], \quad \varphi_\lambda(x) = x^\lambda.$$

Par convention, la fonction φ_0 est la fonction constante égale à 1.

Soit $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$, une suite de réels positifs et deux à deux distincts. On note W , le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}([0, 1])$ engendré par la famille $(\varphi_{\lambda_k})_{k \in \mathbb{N}}$.

Le but du problème est d'établir des critères de densité de l'espace W dans $\mathcal{C}([0, 1])$ pour l'une ou l'autre des normes classiques définies par

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$$

et par

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Partie A. Questions préliminaires

1. Démontrer que la famille $(\varphi_\lambda)_{\lambda \geq 0}$ est une famille libre de l'espace vectoriel $\mathcal{C}([0, 1])$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère deux familles $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$ et $(b_k)_{1 \leq k \leq n}$ de réels tels que

$$\forall 1 \leq i, j \leq n, \quad a_i + b_j \neq 0.$$

Pour tout entier $1 \leq m \leq n$, on note alors D_m , le déterminant de la matrice

$$\left(\frac{1}{a_i + b_j} \right)_{1 \leq i, j \leq m} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}),$$

dit *déterminant de Cauchy* d'ordre m .

On définit également la fraction rationnelle

$$R = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (X - a_k)}{\prod_{k=1}^n (X + b_k)} \in \mathbb{R}(X).$$

2. Démontrer que si R est de la forme

$$R = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{X + b_k},$$

alors

$$A_n D_n = R(a_n) D_{n-1}.$$

On pourra considérer le déterminant obtenu à partir de D_n en remplaçant la dernière colonne par

$$\begin{pmatrix} R(a_1) \\ R(a_2) \\ \vdots \\ R(a_n) \end{pmatrix}.$$

3. En déduire que

$$D_n = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n} (a_i + b_j)}.$$

Partie B. Distance d'un point à une partie

Soit $(E, \|\cdot\|)$, un espace vectoriel normé. On rappelle que la distance d'un point $x \in E$ à une partie non vide $A \subset E$ est le réel $d(x, A)$ défini par

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|.$$

On considère un sous-espace vectoriel V de dimension finie de E et on pose :

$$B = \{y \in E : \|y - x\| \leq \|x\|\}.$$

4. Démontrer que $d(x, A) = 0$ si, et seulement si, x est adhérent à A .
5. Soient $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite croissante de parties de E et

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Démontrer que

$$d(x, A) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, A_n).$$

6. a. Démontrer que $B \cap V$ est une partie compacte de E .
- b. En déduire que

$$d(x, V) = d(x, B \cap V)$$

pour tout $x \in E$.

7. En déduire que, pour tout $x \in E$, il existe un élément y de V tel que

$$d(x, V) = \|x - y\|.$$

Partie C. Distance d'un point à un sous-espace de dimension finie

Dans cette partie, E est un espace vectoriel réel de dimension finie, muni d'un produit scalaire $(\cdot | \cdot)$ et de la norme associée à ce produit scalaire.

8. Soit V , un sous-espace vectoriel de dimension finie de E . Démontrer que, pour tout $x \in E$, le projeté orthogonal de x sur V est l'unique élément $y \in V$ tel que

$$d(x, V) = \|x - y\|.$$

Pour toute famille $(x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs de E , on désigne par $G(x_1, \dots, x_n)$, le déterminant de la matrice de Gram définie par

$$M(x_1, \dots, x_n) = ((x_i | x_j))_{1 \leq i, j \leq n}.$$

9. Démontrer que $G(x_1, \dots, x_n) = 0$ si, et seulement si, la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est liée.
10. On suppose que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre et on note V , le sous-espace vectoriel de E engendré par cette famille. Démontrer que

$$[d(x, V)]^2 = \frac{G(x_1, \dots, x_n, x)}{G(x_1, \dots, x_n)}$$

pour tout $x \in E$.

Partie D. Comparaison des normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_2$

Pour toute partie A de $\mathcal{C}([0, 1])$, on note $\overline{A}^\infty$ et $\overline{A}^2$, les adhérences de A relatives aux normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_2$ respectivement.

Pour $f \in \mathcal{C}([0, 1])$, on note $d(f, A)$, la distance de f à A relative à la norme $\|\cdot\|_2$:

$$d(f, A) = \inf_{g \in A} \|f - g\|_2.$$

11. Démontrer que

$$\forall f \in \mathcal{C}([0, 1]), \quad \|f\|_2 \leq \|f\|_\infty.$$

En déduire que

$$\overline{A}^\infty \subset \overline{A}^2$$

pour toute partie A de $\mathcal{C}([0, 1])$.

12. Démontrer que l'adhérence d'un sous-espace vectoriel V de E est un sous-espace vectoriel fermé de E .

13. On considère l'ensemble

$$V_0 = \{f \in \mathcal{C}([0, 1]) : f(0) = 0\}$$

et on rappelle que φ_0 désigne la fonction constante égale à 1.

13. a. Démontrer que $\varphi_0 \in \overline{V_0}^2$.

b. En déduire que V_0 est dense dans $\mathcal{C}([0, 1])$ pour la norme $\|\cdot\|_2$, mais pas pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

14. Démontrer qu'un sous-espace vectoriel V de $\mathcal{C}([0, 1])$ est dense pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ si, et seulement si,

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \varphi_m \in \overline{V}^\infty.$$

15. En déduire qu'un sous-espace vectoriel V de $\mathcal{C}([0, 1])$ est dense pour la norme $\|\cdot\|_2$ si, et seulement si,

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \varphi_m \in \overline{V}^2.$$

Partie E. Un critère de densité pour la norme $\|\cdot\|_2$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note W_n , l'espace vectoriel engendré par la famille finie

$$(\varphi_{\lambda_k})_{0 \leq k \leq n}.$$

16. Démontrer que le sous-espace vectoriel W est dense dans $\mathcal{C}([0, 1])$ pour la norme $\|\cdot\|_2$ si, et seulement si,

$$\forall \mu \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d(\varphi_\mu, W_n) = 0.$$

17. Démontrer que

$$d(\varphi_\mu, W_n) = \frac{1}{\sqrt{2\mu+1}} \prod_{k=0}^n \frac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1}$$

pour tout $\mu \geq 0$.

18. Soit $\mu \geq 0$. Démontrer que la suite

$$\left(\frac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1} \right)_{k \in \mathbb{N}}$$

tend vers 1 si, et seulement si, $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

On pourra étudier les variations de la fonction

$$\left[x \mapsto \frac{\mu - x}{x + \mu + 1} \right]$$

pour $x \in [0, \mu]$.

19. En déduire que l'espace W est dense dans $\mathcal{C}([0, 1])$ pour la norme $\|\cdot\|_2$ si, et seulement si, la série

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{\lambda_k}$$

est divergente.

FIN DE L'ÉPREUVE