Devoir libre n°03
à rendre le 20/10/2017

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées à coefficients réels et on définit $\Phi : E^2 \to \mathbb{R}$ en posant :

$$\Phi(A, B) = \mathrm{tr}({}^tAB)$$

Précisons que $\mathrm{tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{ii}$ si $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$

1. Vérifier que Φ est un produit scalaire sur E. Montrer que

$$\Phi(A, B) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}.$$

2. Montrer que les matrices orthogonales à coefficients réels appartiennent à une boule de rayon $\sqrt{n}$ et qu'elles forment un compact.

3. On considère le sous-espace vectoriel de matrices telles que ${}^tA = A$ et le sous-espace vectoriel des matrices telles que ${}^tA = -A$. Que peut on dire de ces deux sous-espaces ?

Exercice 2

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer les puissances de A.

2. Déterminer la limite de la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $C_n = \dfrac{1}{n+1}(I_3 + A + A^2 + ... + A^n)$.

Exercice 3

On se propose d'établir, pour certaines classes de fonctions numériques définies sur $[a, b]$, la propriété

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(t)e^{int}dt = 0.$$

1. Montrer cette relation lorsque f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.

2. On s'intéresse maintenant aux fonctions continues. On introduit pour cela l'espace $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ des fonctions numériques continues sur $[a, b]$ muni de la norme $\|.\|_\infty$.

(a) Montrer que les fonctions affines par intervalles forment une partie dense de E. (indication : penser à la continuité uniforme d'un élément f de E.

(b) Soit f affine par intervalles sur $[a, b]$ montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(t)e^{int}dt = 0.$$

(c) En déduire la relation pour toute fonction continue.

Fin de l'épreuve