Devoir libre n°04

à rendre le 08/11/2017

EXERCICE : 1

On considère $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni d'une norme matricielle $\|\cdot\|$. ($\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$). Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère la fonction $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(A) = A - \frac{1}{2}(A^2 - B).$$

1. Montrer que f est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et calculer sa différentielle.
2. On pose $\mathcal{B} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \|I - A\| \leq \frac{1}{2}\}$. Montrer que

$$\forall A \in \mathcal{B}, \forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|df_A(H)\| \leq \frac{1}{2}\|H\|.$$

En déduire que pour tous $X, Y \in \mathcal{B}$, on a

$$\|f(X) - f(Y)\| \leq \frac{1}{2}\|X - Y\|.$$

3. On suppose que $B \in \mathcal{B}$. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{B}$, on a $f(A) \in \mathcal{B}$. (Indication : introduire la matrice $f(I) - I$). En déduire qu'il existe une unique matrice $A \in \mathcal{B}$ qui vérifie $A^2 = B$. (Indication : utiliser le théorème du point fixe, voir TD)

EXERCICE : 2

$\mathbb{R}^2$ étant muni de la norme $\|(x, y)\| = \max(|x|, |y|)$. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \left(1 - \cos y + \sin x, \frac{x^2}{2} + \sin y\right).$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer sa matrice jacobienne.
2. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|(x, y)\| \leq \frac{1}{4}$, on a $\|I - df_{(x,y)}\| \leq \frac{1}{2}$.
3. Soit $A = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|(a, b)\| \leq \frac{1}{8}$. On considère la fonction $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$\forall X \in \mathbb{R}^2, g(X) = X - (f(X) - A).$$

- (a) Montrer que pour tout $X \in \mathbb{R}^2$ et $Y \in \mathbb{R}^2$, $\|X\| \leq \frac{1}{4}$, $\|Y\| \leq \frac{1}{4}$, on a

$$\|g(X) - g(Y)\| \leq \frac{1}{2}\|X - Y\|$$

et

$$\|g(X)\| \leq \frac{1}{4}.$$

- (b) En déduire que le système

$$\begin{cases} 1 - \cos y + \sin x = a \\ \frac{x^2}{2} + \sin y = b \end{cases}$$

possède une solution unique vérifiant $|x| \leq \frac{1}{4}$ et $|y| \leq \frac{1}{4}$. (Indication : utiliser le théorème du point fixe).

EXERCICE : 3

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{1 + x - y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$.

1. Montrer que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$. Calculer le gradient de f en tout point de $\mathbb{R}^2$.
2. (a) Soit (x_0, y_0) un point critique de f . En utilisant la somme des deux dérivées partielles premières de f en ce point, montrer que $(y_0^2 - x_0^2) - (y_0 + x_0) = 0$.
(b) En déduire que $y_0 = -x_0$, puis que f admet un unique point critique sur $\mathbb{R}^2$. Quelle est la valeur de x_0 ?
3. (a) Calculer la hessienne f en $(x_0, -x_0)$.
(b) À l'aide de résultats du cours que l'on rappellera, montrer que $(x_0, -x_0)$ réalise un maximum local de f .

FIN DE L'ÉPREUVE