Devoir libre $n°05$
à rendre le 23 /11/2017

EXERCICE : 1

1. Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$ de dimension finie $n > 0$. Soit u un endomorphisme de E de rang 1.

   (i) En discutant sur la dimension de $\text{Im}u \cap \text{Ker}u$, montrer que $E = \text{Im}u \oplus \text{Ker}u$ ou $\text{Im}u \subset \text{Ker}u$.

   (ii) Soit e un vecteur non nul de $\text{Im}u$. Justifier l'existence d'une base de E dont le premier vecteur est e. Dans le cas où $\text{Im}u \subset \text{Ker}u$, quelle est la forme de la matrice de u sur une telle base?

   (ii) Dans le cas où $\text{Im}u \subset \text{Ker}u$, montrer que $Tr(u) = 0$.

   (iii) Montrer alors l'équivalences des trois assertions :

   (a) u est diagonalisable.

   (b) $E = \text{Im}u \oplus \text{Ker}u$.

   (c) $Tr(u) \neq 0$.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des matrices (n, n) à coefficients dans $\mathbb{C}$. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})^*$ le dual de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, c'est à dire l'espace vectoriel des formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2. Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note F_A l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par :

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), F_A(X) = Tr(AX),$$

   où $Tr(AX)$ désigne la trace de la matrice AX.

   (i) Montrer que F_A est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

   (ii) On considère l'application F définie par :

$$\begin{array}{rccc} F : & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^* \\ & A & \mapsto & F_A \end{array}$$

   Montrer que F est linéaire.

   (iii) Soit $(E_{i,j})_{(i,j)\in\{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,n\}}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (on rappelle que la matrice $E_{i,j}$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, excepté le (i, j)-ième qui est égal à 1). Pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$, exprimer $F_A(E_{i,j})$ en fonction des coefficients de A. En déduire que F est injective.

   (iv) Montrer que F est un isomorphisme.

3. Soit J une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et soit f une forme linéaire non nulle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On considère l'application ψ_f définie par :

$$\begin{array}{rccc} \psi_f : & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ & X & \mapsto & f(X)J \end{array}$$

   On remarquera que ψ_f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

   (i) Justifier l'existence d'une unique matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), f(X) = Tr(AX).$$

(ii) Comparer le noyau de ψ_f et le noyau de f. Quel est l'image de ψ_f? Quel est le rang de ψ_f?

(iii) Exprimer la trace de ψ_f en fonction de A et J.

(iv) En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur A et J pour que ψ_f soit diagonalisable.

(v) On suppose que ψ_f est diagonalisable. Déterminer le polynôme minimal de ψ_f.

Exercice : 2

On considère une matrice $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$(\forall i \in [1, n]) \ (\forall j \in [1, n]) \ a_{ij} \geqslant 0$$

$$(\forall i \in [1, n]) \ \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij} = 1 .$$

Une telle matrice est dite stochastique. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ dont la matrice par rapport à la base canonique est A.

1° Montrer que 1 est valeur propre de A.

2° Soit $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{C}^n$. On pose $\| x \| = \sup\limits_{i \in [1,n]} | x_i |$. Montrer que $\| u(x) \| \leqslant \| x \|$.

3° Montrer que toutes les valeurs propres de u sont de module inférieur ou égal à 1.

4° Soit $z_1, ..., z_n$ des éléments de $\mathbb{C}$ tels que $| z_i | \leqslant 1$ pour tout i de $[1, n]$. Soit $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ des réels positifs ou nuls tels que

$$\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i = 1 .$$

Montrer que $\left| \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i z_i \right| \leqslant 1$. A quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on l'égalité ?

5° Soit λ une valeur propre de u telle que $| \lambda | = 1$ et $\lambda \neq 1$. Soit $x = (x_1, ..., x_n)$ un vecteur propre non nul associé à λ et $k \in [1, n]$ tel que $| x_k | \geqslant | x_i |$ pour tout i de $[1, n]$.
Montrer qu'il existe $k_1 \in [1, n]$ tel que $k_1 \neq k$ et $x_{k_1} = \lambda x_k$.
En déduire qu'il existe un entier naturel non nul q tel que $\lambda^q = 1$.

6° Soit A une matrice stochastique dont tous les coefficients sont strictement positifs. Montrer que 1 est la seule valeur propre de u de module 1. Montrer que le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension 1.