Devoir libre $n°04$
à rendre le 13/12/2017

EXERCICE : 1

Soit E un espace vectoriel euclidien, si $u \in E\backslash\{0\}$ on note par s_u la symétrie orthogonale parallèlement au sous-espace vectoriel engendré par u.

1. Montrer que

$$\forall x \in E, \ \ s_u(x) = x - 2\frac{(x|u)}{\|u\|^2}u.$$

2. Soit $u, v \in E\backslash\{0\}$ et $\rho_{u,v}$ l'endomorphisme de E défini par

$$\rho_{u,v}(x) = x - (v|x)u, \forall x \in E.$$

(a) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de $\rho_{u,v}$. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $(u|v)$ pour que $\rho_{u,v}$ soit diagonalisable.

(b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(u|v)$ pour que $\rho_{u,v}$ soit inversible et déterminer son inverse dans ce cas.

3. (a) Déterminer l'endomorphisme adjoint de $\rho_{u,v}$.

(b) Montrer que pour tout vecteur non nul u, il existe un unique vecteur non nul, noté $\hat{u}$, tel que $\rho_{u,\hat{u}}$ appartienne à $\mathscr{O}(E)$ (le groupe orthogonal de E).
Expliciter $\hat{u}$ en fonction de u.

(c) Montrer que $\rho_{u,\hat{u}} = s_u$.

EXERCICE : 2

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$. Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est dit antisymétrique si

$$\forall x, y \in E, \ (u(x)|y) = -(x|u(y)).$$

Le but de l'exercice est d'étudier certaines propriétés des endomorphismes antisymétriques.

1. Montrer que u est antisymétrique si et seulement si, pour tout $x \in E$, $(x|u(x)) = 0$.

2. Montrer que u est antisymétrique si et seulement si sa matrice dans toute base orthonormale est antisymétrique.

3. On fixe pour la suite de l'exercice un endomorphisme antisymétrique $u \in \mathscr{L}(E)$. Démontrer que $\mathrm{Im}(u) = (\ker u)^{\perp}$.

4. Soit F un sous-espace de E stable par u. Démontrer que $F^{\perp}$ est stable par u.

5. Montrer que $\ker(u) = \ker(u^2)$.

6. Démontrer que le spectre de u est soit vide, soit restreint à $\{0\}$.

7. Montrer que u^2 est diagonalisable et que ses valeurs propres sont négatives.

8. Soit F un espace euclidien, $v \in \mathscr{L}(F)$ antisymétrique tel que $v^2 = -\alpha^2 Id_F$, où $\alpha > 0$. Démontrer qu'il existe une base orthonormale de F telle que la matrice de v dans cette base soit de la forme

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} J(\alpha) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J(\alpha) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J(\alpha) \end{pmatrix}$$

où

$$J(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

9. En déduire qu'il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u a pour forme

$$\begin{pmatrix} A(\alpha_1) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & A(\alpha_2) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A(\alpha_r) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

••••••••••