Devoir libre $n°07$
à rendre le 02/01/2018

NOTATIONS ET OBJECTIFS

n désigne un entier supérieur strictement à 1 et E l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, ${}^tA$ est la matrice transposée de A.
Les vecteurs x, y, ... de $\mathbb{R}^n$ seront désignes aussi par des matrices colonnes X, Y, ... , $\mathbb{R}^n$ sera muni du produit scalaire $(.|.)$ défini par : $(x|y) = (X|Y) =^t XY$.
La norme d'un vecteur X de sera notée $|X|$. L'espace vectoriel E sera muni du produit scalaire $((.|.))$ défini par : $((A|B)) = \operatorname{tr}({}^tAB)$. Le couple $(E, ((.|.)))$ est un espace euclidien. La norme d'une matrice A sera notée $\|A\|$.
(Rappel : la trace du produit AB est égale à la trace de BA lorsque les produits AB et BA sont des matrices carrées.)
Le but du problème est de montrer que pour une matrice M donnée, il est possible de trouver une matrice P de rang inférieur à celui de M, telle que la distance de M à P soit la plus petite possible.

PREMIÈRE PARTIE

Expression d'une matrice M de rang r d l'aide de matrices de rang 1.

Désignons par m l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé dans la base canonique à une matrice M de rang r, et par m l'endomorphisme adjoint de m : pour tous vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$

$$(m^*(x)|y) = (x|m(y)).$$

1. Valeurs propres de l'endomorphisme $m^* \circ m$
Démontrer que le rang de l'endomorphisme composé $m^* \circ m$ est égal à r. Établir l'existence d'une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres (v_i), $1 \leq i \leq n$ de $m^* \circ m$ telle que les valeurs propres α_i associées vérifient les relations :

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq ...\alpha_r > 0 \text{ et si } r < n, \ \ \alpha_{r+1} = \alpha_{r+2} = ... = \alpha_n = 0.$$

2. (a) Démontrer que les vecteurs $m(v_i)$ sont orthogonaux deux à deux. Calculer leurs normes.
(b) En déduire qu'il existe deux bases orthonormées de $\mathbb{R}^n$, (Y_i), $1 \leq i \leq n$ et (Z_i), $1 \leq i \leq n$ telles que :

$$M = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\alpha_i} Y_i {}^t Z_i.$$

DEUXIÈME PARTIE

Approximation d'une matrice de rang r par une matrice de rang inférieur s dans $E, ((.|.))$.

La matrice M de rang r est donnée ainsi qu'un entier s vérifiant $s < r$, le but de cette partie est de déterminer une matrice P qui rende minimum la distance de M à l'ensemble R_s des matrices de rang inférieur ou égal à s. La distance de la matrice M à R_s est définie par la relation :

$$d(M, R_s) = \inf\{\|M - N\| / N \in R_s\}.$$

Il sera admis dans la suite que si N est une matrice de rang q, et M une matrice de rang r, la suite décroissante (γ_i) des valeurs propres de la matrice ${}^t(M - N)(M - N)$ vérifie pour i, $1 \leq i \leq n - q$, l'inégalité :

$$\gamma_i \geq \alpha_{i+q},$$

où α_i est la suite décroissante des valeurs propres de ${}^tMM$.

1. Résolution du problème d'approximation
Le rang r de la matrice M est supposé supérieur strictement à 1. Soit s un entier tel que $0 < s < r$.
(a) Démontrer l'inégalité :

$$d(M, R_s) \leq (\alpha_{s+1} + ... + \alpha_r)^{\frac{1}{2}},$$

les α_i sont les valeurs propres de la matrice ${}^tMM$.

(b) Soit N une matrice de R_s, comparer $\|M-N\|^2$ et $\alpha_{s+1}+...+\alpha_r$.
(c) En déduire la valeur de $d(M,R_s)$. Existe-t-il une matrice P de R_s telle que $\|M-P\|=d(M,R_s)$?
(d) Est-ce que R_s est un sous-ensemble fermé de E ?

2. Approximation par une matrice symétrique

Soit s un entier, $1\leq s\leq n$; soit S_s, l'ensemble des matrices symétriques de rang inférieur ou égal à s. Soient A et B deux matrices respectivement symétrique et antisymétrique.

(a) Que vaut $((A|B))$?
(b) Démontrer qu'il existe une matrice symétrique U appartenant à S_s, approchant A au plus près.
Évaluer $\|A-U\|$ à l'aide des valeurs propres λ_i de A ($|\lambda_1|\geq|\lambda_2|\geq...\geq|\lambda_n|$. A quelle condition y-a-t-il unicité de la matrice U ?
(c) Soit M une matrice de E telle que $M=A+B$, où A symétrique, B antisymétrique. Démontrer qu'il existe une matrice symétrique V appartenant à S_s approchant M au plus près.
Donner la valeur de $d(M,S_s)$. Y-a-t-il unicité de la matrice V ?

FIN DU PROBLÈME