Devoir libre $n°08$
à rendre le 18/01/2018

Quelques propriétés de l'exponentielle de matrices

$\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n de termes réels ; n est un entier, $n \geq 1$. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ sera muni de la norme euclidienne, c'est-à-dire , pour tout $X = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\|X\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

L'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sera muni de la norme définie par : $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad \|A\| = \sup\limits_{X \neq 0} \dfrac{\|AX\|}{\|X\|}$.

1. Montrer que pour tout couple de matrices A et B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|.$$

2. Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Établir que la série de matrices de terme général $U_k = \dfrac{A^k}{k!}$ avec $k \in \mathbb{N}$ est convergente.

Soit $\exp(A)$ la somme de cette série : $\exp(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$.

(b) Démontrer l'inégalité : $\|\exp(A)\| \leq \exp(\|A\|)$

(c) Établir la relation : $B\exp(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} BA^k$.

Quelle conclusion y-a-t-il lieu d'en tirer sur les matrices $\exp(A)$ et $\exp(A_2)$, lorsque A_1 et A_2 sont deux matrices semblables ?

3. (a) Montrer que si deux matrices A et B commutent, alors :

$$\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$$

(b) Soient les trois matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer $\exp(D)$ et $\exp(F)$; comparer $\exp(E)$ et le produit $\exp(D)\exp(F)$.

4. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\|(A + H)^k - A^k\| \leq (\|A\| + \|H\|)^k - \|A\|^k.$$

(b) En déduire que pour tout $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\|\exp(A + H) - \exp(A)\| \leq e^{\|A\|}(e^{\|H\|} - 1),$$

puis que l'application exponentielle est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

5. (a) Soit θ un réel et soit C_θ la matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$: $C_\theta = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $\exp(C_\theta)$. Est-ce que l'application $A \longmapsto \exp(A)$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est injective ?

(b) Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Démontrer que la matrice $\exp(A) - I_n$ peut s'écrire $A(I_n + S_A)$. Établir qu'il existe un réel α ($\alpha > 0$) tel que $\|A\| < \alpha$ implique $\|S_A\| < 1$.

(c) Soit T une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$; établir que si $\|T\| < 1$, la matrice $I_n + T$ est inversible (démontrer par exemple que le seul vecteur X de $\mathbb{R}^n$ tel que $(I_n + T)X$ est nul, est le vecteur nul).

(d) Soit M une matrice appartenant à la boule ouverte $B(O, \alpha)$ de centre la matrice nulle O et de rayon α ; α est le réel défini dans à l'alinéa (b) ; établir que l'égalité entre les matrices $\exp(M)$ et I_n est équivalente à la nullité de M.

FIN DE L'ÉPREUVE